الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) **المستوى:** ثالثة ثانوي "علوم تجريبية" **المادة:** رياضيات	**الفرض الأول** **للفصل الأول**	**الموسم الدراسي:** 2019/2020م **المدة:** ساعتان (2سا) **إعداد:** عبد المطلب

تمرين1 (6نقاط)

احسب النهايات التالية:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x(x^2-3)}{x^2+2x-1}$ **2.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{4x^2}{(2x-1)^2}\right)$ **3.** $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-2}\dfrac{x^2-6}{x^2+2x}$

4. $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1}\dfrac{2x^2-x-3}{x^2+2x+1}$ **5.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x^2+1}-x\right)$ **6.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{2019}-1}{x-1}$

تمرين2 (6نقاط)

إليك جدول تغيرات كلا من الدالة f ودالتها المشتقة f' المعرّفتان وتقبلان الاشتقاق على $\mathbb{R}$. ليكن $(\mathscr{C})$ منحني الدالة f .

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	2	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	1	↗	2	↘	1	↘	0	↗	1

1) أ) عيّن إشارة $f(x)$ على المجال $]-\infty;+\infty[$.

ب) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-1;1]$. استنتج إشارة $(f(x)-1)$.

2) اكتب معادلة المماس للمنحني $(\mathscr{C})$ عند $A(-1;0)$.

3) اكتب معادلة المماس لـ$(\mathscr{C})$ عند $B(1;2)$. ماذا تمثل B؟

4) احسب: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{x-1}$.

5) g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

أ) احسب النهايتين التاليتين: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

ب) احسب $g'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ ، واحسب $g'(1)$. ج) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}-\{-1\}$.

تمرين3 (8نقاط)

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{4x}{(x-1)^2}$ ، و$(\mathscr{C})$ بيانها في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1}f(x)$. استنتج أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد $x\neq1$ ، $f'(x)=\dfrac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$. ادرس إشارة $f'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني $(\mathscr{C})$ عند المبدأ O $(x_0=0)$.

4) بيّن أنّه من أجل كل عدد $x\neq1$ ، $f''(x)=\dfrac{8(x+2)}{(x-1)^4}$. استنتج أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

5) g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $g(x)=f(x)-4x$ ، و$(\mathscr{C}')$ بيانها في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C}')$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) يطلب كتابة معادلته. ادرس الوضع النسبي لـ$(\mathscr{C}')$ و (D).

ب) ادرس إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}-\{1\}$. استنتج الوضع النسبي للمنحني $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f والمماس (Δ).

تصحيح الفرض الأول للفصل 1: 2019م

تمرين 1:

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x(x^2-3)}{x^2+2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$

2) $\lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{4x^2}{(2x-1)^2}\right) = 2-\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2}{4x^2} = 2-1=1$

3) $\lim_{x\overset{>}{\to}-2} \frac{x^2-6}{x^2+2x} = +\infty$ ($x^2-6 \to -2$, $x^2+2x \to 0^-$)

	-2		0	
$+$	0	$-$	0	$+$

4) $\lim_{x\overset{>}{\to}-1} \frac{2x^2-x-3}{x^2+2x+1} = \lim_{x\overset{>}{\to}-1}\frac{(x+1)(2x-3)}{(x+1)^2}$

$= \lim_{x\overset{>}{\to}-1}\frac{2x-3}{x+1} = -\infty$ ($2x-3 \to -5$, $x+1 \to 0^+$)

	-1	
$-$	0	$+$

5) أ) $\lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x\right)$

$= \lim_{x\to+\infty} x\left[2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right] = +\infty$ ($\frac{1}{x^2} \to 0$)

6) نضع: $f(x)=x^{2019}$; $f'(x)=2019x^{2018}$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 2019$

تمرين 2:

1) أ) $f(x)<0$ لما $x<-1$.

$f(x)>0$ لما $x>-1$.

$f(x)=0$ لما $x=-1$.

ب) f مستمرة و متزايدة تماما على $[-1;1]$.

$f(-1)=0<1$ و $f(1)=2>1$ ، ومنه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α ؛ $-1\leq\alpha\leq1$.

$f(x)-1<0$ لما $x<\alpha$.

$f(x)-1>0$ لما $x>\alpha$.

$f(x)-1=0$ لما $x=\alpha$.

2) $y_1 = f'(-1)(x+1)+f(-1) = 2x+2$

3) $y_2 = f'(1)(x-1)+f(1) = 0+2 = 2$

B نقطة إنعطاف ($f'(x)$ انعدمت دون تغيير إشارتها)

4) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = 1$

$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1} = f''(1) = 0$ (إنعطاف)

5) أ) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)} = 0$

ب) $g'(x) = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$

$g'(1) = \frac{-f'(1)}{[f(1)]^2} = 0$

جـ) $f'(x)\geq0$ و منه $g'(x)\leq0$

ومنه: الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

"عبد المطلب"

تمرين 3:

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$

ومنه: $y=0$ مستقيم مقارب لـ (C)

$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{\overbrace{4x}^{\to 4}}{\underbrace{(x-1)^2}_{\to 0^+}} = +\infty$

ومنه $x=1$ مستقيم مقارب لـ (C)

2) $f'(x) = \frac{4(x-1)^2 - 2(x-1)(4x)}{(x-1)^4}$

$f'(x) = \frac{-4(x-1)(x+1)}{(x-1)^4} = \frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$

إشارة $f'(x)$: $-$ ⊕ -1 $+$ ‖ 1 $-$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

3) $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 4x$

4) $f''(x) = -4\left[\frac{1\times(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^6}\right]$

$f''(x) = -4\left[\frac{(x-1)^2(x-1-3x-3)}{(x-1)^6}\right]$

$f''(x) = \frac{-4(-2x-4)}{(x-1)^4} = 8\cdot\frac{x+2}{(x-1)^4}$

$f''(x)=0$ لما $x=-2$: $-$ ⊕ -2 $+$ ‖ 1

نقطة الانعطاف هي: $A\left(-2; -\frac{8}{9}\right)$

5) أ) ليكن (D): $y=-4x$

$g(x) - (-4x) = f(x)$

$\lim_{x\to\pm\infty}(g(x)+4x) = \lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$

ومنه (D) مستقيم مقارب مائل لـ (C').

لدراسة الوضعية ندرس إشارة:

$g(x) - y = f(x)$

$-$ ⊕ 0 $+$ ‖ 1

(C') تحت (D) لما $x\in]-\infty,0[$

(C') فوق (D) لما $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$

(C') يقطع (D) عند المبدأ $(0,0)$

ب)

$g(x) = f(x) - 4x$

$g(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} - 4x$

$g(x) = \frac{4x[1-(x-1)^2]}{(x-1)^2}$

$g(x) = \frac{4x(-x^2+2x)}{(x-1)^2}$

$g(x) = \frac{4x^2(-x+2)}{(x-1)^2}$

$+$ ⊕ 0 $+$ ‖ 1 ⊕ 2 $-$

(C) أسفل (Δ) لما $x\in]2,+\infty[$

(C) أعلى (Δ) لما $x\in]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,2[$

(C) يقطع (Δ) عند $(2,8)$ ويمس (Δ) عند $(0,0)$

"عبد المطلب"