الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية" المادة: رياضيات	**اختبار** **الفصل الثاني**	الموسم الدراسي: 2020/2019 المدة: ثلاث ساعات (3سا) إعداد: عبد المطلب

تمرين1 (4نقاط)

كيس U_1 يحتوي على 6 كريات حمراء و5 كريات سوداء لا نفرق بينها عند اللمس. نسحب عشوائيا في آن واحد أربع كريات.

نعتبر الأحداث: A: سحب أربع كريات حمراء، B: سحب أربع كريات سوداء و C: سحب أربع كريات من لونين مختلفين.

1) احسب الاحتمالين $P(A)$ و $P(B)$، ثم استنتج حساب الاحتمال $P(C)$.

2) نعرّف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

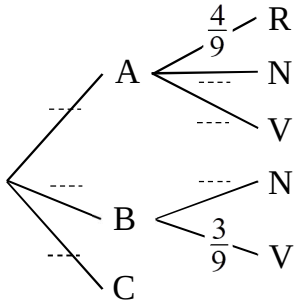
عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X، ثم احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

3) كيس U_2 يحتوي على 3 كريات خضراء وكريتين سوداوين. نضع الكريات الأربع المسحوبة من الكيس U_1 في الكيس U_2.

إذا كانت الكريات الأربع من نفس اللون نسحب كرية واحدة من U_2، وإذا كانت من لونين مختلفين نوقف عملية السحب.

نعتبر الأحداث R، N و V المعرّفة كما يلي:

R: سحب كرية حمراء، N: سحب كرية سوداء و V: سحب كرية خضراء.



أ) أنقل ثم أكمل شجرة الإحتمالات المقابلة التي تنمذج هذه الوضعية.

ب) احسب الاحتمالات التالية: $P(B\cap N)$، $P(N)$ و $P_N(B)$.

(في كل التمرين، تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

تمرين2 (5نقاط)

I- نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة: $z^3-(2+\alpha)z^2+2(1+\alpha)z-2\alpha=0$ ... (E)، حيث α عدد حقيقي.

1) تأكّد أنّ العدد الحقيقي α هو حل للمعادلة (E) ذات المجهول z.

2) عيّن العددين الحقيقيين b و c بحيث يمكن كتابة (E) على الشكل: $(z-\alpha)(z^2+bz+c)=0$.

3) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z.

II- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها:

$z_A=\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$، $z_B=\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ و $z_C=\alpha$ وليكن العدد المركب Z حيث $Z=\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$.

1) اكتب z_A و z_B على الشكل الجبري ثم بيّن أنّ: $(z_A-z_B)^{2020}=(z_A+z_B)^{2020}$.

2) بيّن أنّ الكتابة الجبرية للعدد المركب Z هي: $Z=\dfrac{\alpha^2-2\alpha}{\alpha^2-2\alpha+2}+i\dfrac{2(\alpha-1)}{\alpha^2-2\alpha+2}$.

3) أ) عيّن قيمة للعدد الحقيقي α التي من أجلها تكون النقط A، B و C في استقامية.

ب) عيّن قيمتين للعدد الحقيقي α التي من أجلها يكون المثلث ABC قائم في C.

ج) عيّن قيمتين للعدد الحقيقي α التي من أجلها يكون المثلث ABC متقايس الأضلاع.

4) نضع $\alpha=-\sqrt{2}$. لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة: $\{(A,1);(B,1);(C,\sqrt{2})\}$، ولتكن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\sqrt{2}\,\overrightarrow{MC}\|=2+2\sqrt{2}$. بيّن أنّ (Γ) هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

تمرين3 (4نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدها الأول u_0، حيث $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\dfrac{u_n-2}{2u_n-3}$.

1) تحقّق أنّ: $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4u_n-6}$، ثم برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_n<1$.

2) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2(u_n-1)^2}{3-2u_n}$. استنتج تغيرات وتقارب المتتالية (u_n).

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\dfrac{\alpha}{u_n-1}-n$، حيث α ينتمي إلى $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية حسابية أساسها $(-2\alpha-1)$، ثم ادرس حسب قيم العدد الحقيقي α تغيرات المتتالية (v_n).

ب) في ما يلي نعتبر أنّ $\alpha=1$. اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n و u_n بدلالة n، ثم احسب نهاية المتتالية (u_n).

4) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n=\dfrac{1}{u_0-1}+\dfrac{1}{u_1-1}+\ldots+\dfrac{1}{u_n-1}=-(n+1)^2$.

تمرين4 (7نقاط)

I- g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=2x+1-e(1+\ln x)$

1) احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)$ وبيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

2) احسب $g'(x)$، ادرس إشارتها ثم شكّل جدول تغيرات الدالة g.

3) استنتج أنّ $g(x)>0$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$.

4) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=1$ تقبل في $\mathbb{R}_+^*$ حلين، أحدهما e والآخر α حيث $0{,}5<\alpha<0{,}6$.

II- f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x^2+x(1-e\ln x)$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ وبيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) أ) بيّن أنّ: من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f'(x)=g(x)$. استنتج اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

ب) برهن على وجود مماسين (Δ_1) و (Δ_2) للمنحني $(\mathscr{C})$ معامل توجيه كل منهما يساوي 1. يمكن استعمال **I-** 4).

ج) بيّن أنّ معادلة المماس (Δ_1) هي: $y_1=x$، وأنّ معادلة المماس (Δ_2) هي: $y_2=x+\alpha(e-\alpha)$.

3) أ) شكّل جدول تغيّرات الدالة k المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $k(x)=x-e\ln x$، ثم بيّن أنّ: $k(x)\ge 0$ على $\mathbb{R}_+^*$.

ب) استنتج إشارة $(f(x)-x)$، ثم ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمماس (Δ_1).

4) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف A، يطلب تعيين إحداثيها بتقريب إلى 10^{-2} بالزيادة.

5) احسب $f(1)$ و $f(5)$، ثم ارسم المماسين (Δ_1) و (Δ_2)، والمنحني $(\mathscr{C})$. اعتبر $\alpha\approx 0{,}55$

6) لتكن h الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=x[|x|+1-e\ln|x|]$.

بيّن أنّ الدالة h فردية، ثم اشرح كيفية رسم البيان $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة h وارسمه في نفس المعلم مع $(\mathscr{C})$.

III- (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدها الأول u_0، حيث $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n<e$.

2) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، المتتالية (u_n) متزايدة.

3) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد الحقيقي e.

تصحيح اختبار الفصل الثاني 2020م

تمرين 1:

1) $P(A)=\frac{C_6^4}{C_{11}^4}=\frac{1}{22}$; $P(B)=\frac{C_5^4}{C_{11}^4}=\frac{1}{66}$

$P(C)=1-[P(A)+P(B)]=\frac{31}{33}$

2) $X=\{0;1;2;3;4\}$

$P(X=0)=\frac{C_5^4}{C_{11}^4}=\frac{1}{66}$; $P(X=1)=\frac{C_6^1\times C_5^3}{C_{11}^4}=\frac{2}{11}$

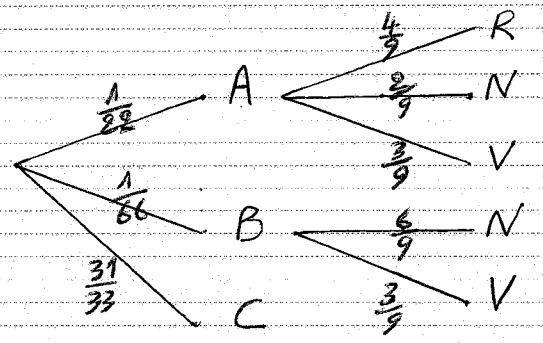
$P(X=2)=\frac{C_6^2\times C_5^2}{C_{11}^4}=\frac{5}{11}$ $P(X=3)=\frac{C_6^3\times C_5^1}{C_{11}^4}=\frac{10}{33}$

$P(X=4)=\frac{C_6^4}{C_{11}^4}=\frac{1}{22}$

X	0	1	2	3	4
P(X)	$\frac{1}{66}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{10}{33}$	$\frac{1}{22}$

$E(X)=0\times\frac{1}{66}+1\times\frac{2}{11}+2\times\frac{5}{11}+3\times\frac{10}{33}+4\times\frac{1}{22}=\frac{24}{11}$

3) أ)



ب) $P(B\cap N)=\frac{1}{66}\times\frac{6}{9}=\frac{1}{99}$

$P(N)=P(A\cap N)+P(B\cap N)=\frac{1}{99}+\frac{1}{99}=\frac{2}{99}$

$P_N(B)=\frac{P(B\cap N)}{P(N)}=\frac{1}{2}$

تمرين 2:

I 1) نعوض z بـ α: $\alpha^3-(2+\alpha)\alpha^2+2(1+\alpha)\alpha-2\alpha=0$

2) $(z-\alpha)(z^2+bz+c)=z^3+(b-\alpha)z^2+(c-\alpha b)z-\alpha c$

بالمطابقة مع (E) نجد: $b-\alpha=-2-\alpha$ ،

$c-\alpha b=2+2\alpha$ و $-\alpha c=-2\alpha$

ومنه: $b=-2$ و $c=2$

3) $(z-\alpha)(z^2-2z+2)=0$

$z=\alpha$ أو $z^2-2z+2=0$

$\Delta=-4=4i^2$ ، ومنه: $z_1=1-i$ و $z_2=1+i$

II 1) $z_A=1-i$ و $z_B=1+i$

2) $(z_A-z_B)^{2020}=(-2i)^{2020}=(-2)^{2020}\times i^{2020}=2^{2020}\times(i^2)^{1010}$

$=2^{2020}\times 1=(z_A+z_B)^{2020}$

3) $z=\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\frac{1-\alpha-i}{1-\alpha+i}=\frac{(1-\alpha-i)(1-\alpha-i)}{(1-\alpha+i)(1-\alpha-i)}$

$z=\frac{(1-\alpha-i)^2}{(1-\alpha)^2-i^2}=\frac{\alpha^2-2\alpha}{\alpha^2-2\alpha+2}+i\,\frac{2\alpha-2}{\alpha^2-2\alpha+2}$

3) أ) A, B و C في استقامية يعني: $(\vec{CB};\vec{CA})=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

ومنه z حقيقي بمعنى الجزء التخيلي معدوم.

$2\alpha-2=0$ ومنه: $\alpha=1$

ب) ABC مثلث قائم يعني: $(\vec{CB};\vec{CA})=\frac{\pi}{2}+k\pi$

ومنه z تخيلي صرف بمعنى الجزء الحقيقي معدوم.

$\alpha(\alpha-2)=0$ ومنه $\alpha=0$ أو $\alpha=2$

ج) ABC متقايس الأضلاع: $AB=AC=BC$

$|z_B-z_A|=|z_C-z_A|=|z_C-z_B|$ ؛ $|z_i|=|\alpha-1+i|=|\alpha-1-i|$

$\sqrt{(\alpha-1)^2+1^2}=\sqrt{2^2}$ أي: $(\alpha-1)^2+1=4$

$\alpha^2-2\alpha-2=0$ ومنه: $\alpha=1-\sqrt{3}$ أو $\alpha=1+\sqrt{3}$

4) $z_G=\frac{z_A+z_B+\sqrt{2}z_C}{1+1+\sqrt{2}}=\frac{2-2}{2+\sqrt{2}}=0$

$\|\vec{MG}+\vec{GA}+\vec{MG}+\vec{GB}+\sqrt{2}\vec{MG}+\sqrt{2}\vec{GC}\|=2(1+\sqrt{2})$

$\|(2+\sqrt{2})\vec{MG}+\underbrace{\vec{GA}+\vec{GB}+\sqrt{2}\vec{GC}}_{\vec{0}}\|=2(1+\sqrt{2})$

$MG=\frac{2(1+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ ؛ (Γ): دائرة مركزها G و $r=\sqrt{2}$

لدينا: $GA=GB=GC=\sqrt{2}$ ومنه (Γ) هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

تمرين 3:

1) $0\leq u_n<1$: $0\leq u_0=0<1$ (محققة)

نفرض أن $0\leq u_n<1$ ونبرهن صحة: $0\leq u_{n+1}<1$

$0\leq u_n<1$ ؛ $0\leq 4u_n<4$ ؛ $-6\leq 4u_n-6<-2$

$\frac{-1}{2}<\frac{1}{4u_n-6}\leq\frac{-1}{6}$ ؛ $\frac{1}{6}\leq\frac{-1}{4u_n-6}<\frac{1}{2}$

$0\leq\frac{2}{3}\leq\frac{1}{2}-\frac{1}{4u_n-6}<1$ ومنه $0\leq u_{n+1}<1$

في الأخير من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $0\leq u_n<1$.

$u_{n+1}=\frac{2u_n-3-1}{4u_n-6}=\frac{2u_n-4}{4u_n-6}=\frac{u_n-2}{2u_n-3}$

2) $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n-2}{2u_n-3}-u_n=\frac{-2u_n^2+4u_n-2}{2u_n-3}=\frac{-2(u_n-1)^2}{2u_n-3}$

$u_{n+1}-u_n=\frac{2(u_n-1)^2}{3-2u_n}$ ؛ $(u_n-1)^2>0$ و $(3-2u_n)>0$ لأن $0\leq u_n<1$

$u_{n+1}-u_n>0$ ومنه (u_n) متزايدة تماما.

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

3) أ) $v_{n+1}=\frac{\alpha}{u_{n+1}-1}-(n+1)=\frac{\alpha}{\frac{u_n-2}{2u_n-3}-1}-n-1=\frac{\alpha(2u_n-3)}{1-u_n}-n-1$

$v_{n+1}-v_n=\frac{\alpha(2u_n-3)}{1-u_n}-n-1-\frac{\alpha}{u_n-1}+n=\frac{\alpha(2u_n-2)}{1-u_n}-1$

$v_{n+1}-v_n=-2\alpha-1$ ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $-2\alpha-1$

لدراسة التغيرات ندرس إشارة $-2\alpha-1$.

$\alpha<\frac{-1}{2}$: (v_n) متزايدة ، $\alpha>\frac{-1}{2}$: (v_n) متناقصة

ب) $\alpha=1$: $v_0=\frac{1}{-1}-0=-1$ و أساسها $r=-3$.

$v_n=v_0+nr=-3n-1$

$v_n=\frac{1}{u_n-1}-n$ ومنه $\frac{1}{u_n-1}=v_n+n$

$u_n-1=\frac{1}{v_n+n}$ ومنه $u_n=\frac{1}{-2n-1}+1$

$\lim_{+\infty}u_n=1$

4) لدينا: $\frac{1}{U_n-1} = V_n + n$ ومنه:

$$S_n = \frac{1}{U_0-1} + \frac{1}{U_1-1} + \dots + \frac{1}{U_n-1} = (V_0+0)+(V_1+1)+\dots+(V_n+n)$$

$$S_n = \underbrace{V_0+V_1+\dots+V_n}_{} + \underbrace{0+1+\dots+n}_{}$$

$$S_n = \frac{n+1}{2}(-1-3n-1) + n\frac{(n+1)}{2} = -(n+1)^2$$

تمرين 4:

I-1) $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = +\infty$ لأن: $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(2 - e\frac{\ln x}{x}\right) + 1 - e\right] = +\infty$$

2) $g'(x) = 2 - \frac{e}{x} = \frac{2x-e}{x}$ $\quad - \xrightarrow{e/2} +$

x	0		$\frac{e}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$0{,}17$	$\nearrow$	$+\infty$

3) $g(\frac{e}{2}) > 0$ ومنه $g(x) > 0$. (القيمة الحدية الصغرى موجبة)

4) $g(e) = 1$. g مستمرة ومتناقصة تماما على $]0{,}5;0{,}6[$. $g(0{,}5) = 1{,}17 > 1$ و $g(0{,}6) = 0{,}87 < 1$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0{,}5;0{,}6[$

II-1) $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0}\left[x^2 + x - ex\ln x\right] = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 + \frac{1}{x} - e\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

2) أ) $f'(x) = 2x + 1 - e\ln x - \frac{e}{x}\cdot x = 2x + 1 - e - e\ln x$

$f'(x) = g(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماما

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

ب) $f'(x_0) = 1$ بمعنى: $g(x_0) = 1$

لدينا سابقا $g(x) = 1$ تقبل حلين e و α، ومنه $g(x_0) = 1$ لما $x_0 = e$ أو $x_0 = \alpha$.

جـ) $x_0 = e$: $y_1 = f'(e)(x-e) + f(e)$

(Δ_1): $y_1 = x$

$x_0 = \alpha$: $y_2 = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$

$y_2 = 1(x-\alpha) + \alpha^2 + \alpha - e\alpha\ln\alpha = x + \alpha^2 - e\alpha\ln\alpha$

لدينا $g(\alpha) = 1$ ومنه $2\alpha + 1 - e - e\ln\alpha = 1$

$\ln\alpha = \frac{2\alpha}{e} - 1$ ومنه: $y_2 = x + \alpha^2 - e\alpha\left(\frac{2\alpha}{e} - 1\right)$

(Δ_2): $y_2 = x + \alpha(e-\alpha)$

3) أ) $k'(x) = 1 - \frac{e}{x} = \frac{x-e}{x}$

x	0		e		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$g(e) \geq 0$ ومنه $g(x) \geq 0$.

ب) $f(x) - x = x\underbrace{(x - e\ln x)}_{k(x)} \geq 0$.

(لاحظ أن $f(x) - x = 0$ لما $x = e$)

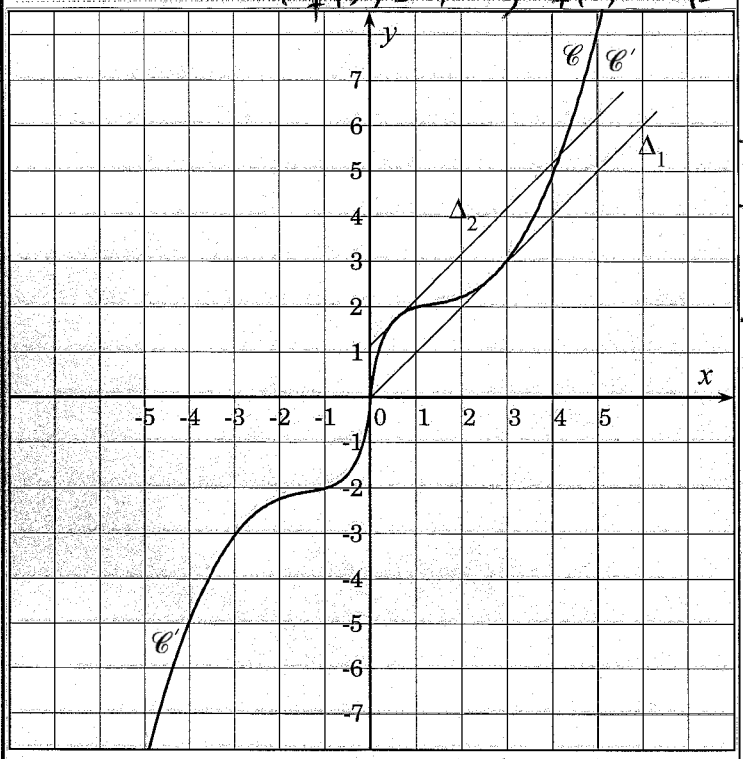
(ج) فوق (Δ_1) على $]e;+\infty[$ و $]0;e[$.

(د) يمس (Δ_1) عند $(e;e)$.

4) $f''(x) = g'(x) = \frac{2x-e}{x}$ (الانعطاف)

تنعدم وتغير إشارتها ومنه: $A(1{,}36;2{,}07)$

5) $f(1) = 2$ و $f(5) = 8{,}1$.



6) $h(-x) = -x(|-x| + 1 - e\ln|-x|) = -x(|x| + 1 - e\ln|x|) = -h(x)$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$، $-x \in \mathbb{R}^*$، $h(-x) = -h(x)$ ومنه h فردية

$x > 0$: $|x| = x$ ومنه $h(x) = f(x)$، $(\mathscr{C}')$ يطابق $(\mathscr{C})$، وبما

$x < 0$: بما أن h فردية نأخذ الجزء المطابق بالنسبة للمبدأ O.

III-1) $u_0 = 1$ ومنه $1 \leq u_0 < e$ (محققة)

نفرض أن $0 \leq u_n < e$ ونبرهن صحة: $0 \leq u_{n+1} < e$.

لدينا: $1 \leq u_n < e$ و f متزايدة ومنه: $f(1) \leq f(u_n) < f(e)$

أي $1 < 2 \leq u_{n+1} < e$ محققة ومنه: $1 \leq u_n < e$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2) من (II-3) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$ ومنه (u_n) متزايدة

3) (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ولدينا: $u_{n+1} = f(u_n)$

ℓ تحقق $f(\ell) = \ell$. عند حل هذه المعادلة

نجد: $\ell = e$ انظر: (II-3) ب)

"عبد المطلب"