الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية" المادة: رياضيات	**فرض** **الفصل الأول**	الموسم الدراسي: 2021/2020م المدة: ساعتان ونصف (2سا 30د) إعداد: عبد المطلب

تمرين1 (10نقاط)

I- نعتبر الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln(x^2+4)-2\ln x-\dfrac{8}{x^2+4}$.

1) احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)$ وبيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0\,;+\infty[$، $g'(x)=\dfrac{8(x^2-4)}{x(x^2+4)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة g، ثم شكّل جدول تغيراتها على المجال $]0\,;+\infty[$.

3) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1<\alpha<1{,}1$. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0\,;+\infty[$.

II- نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $f(x)=x\ln(x^2+4)-2x\ln x$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$.

ب) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)=4$، (ضع $t=\dfrac{4}{x^2}$). استنتج حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وتفسيرها البياني.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0\,;+\infty[$، $f'(x)=g(x)$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) أ) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة A، حيث A نقطة انعطاف المنحني $(\mathscr{C})$.

ب) بيّن أنّ $f(\alpha)=\dfrac{8\alpha}{\alpha^2+4}$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ج) ارسم المماس (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$ على المجال $]0\,;+\infty[$. (وحدة الطول 2cm)

4) لتكن h الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-\infty\,;+\infty[$ بـ: $h(x)=x\ln\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)$ و $h(0)=0$.

أ) احسب $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{h(x)}{x}$. ماذا تستنتج؟ أعط تفسيرا بيانيا للنتيجة.

ب) بيّن أنّ الدالة h فردية، ثم اشرح كيفية رسم البيان $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة h وارسمه.

ج) باستعمال معادلة المماس (Δ)، استنتج معادلة المماس (Δ') للمنحني $(\mathscr{C}')$ عند النقطة B حيث $B(-2;-2\ln 2)$.

تمرين2 (10نقاط)

I- نعتبر الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]-\infty\,;+\infty[$ بـ: $g(x)=2-(x^2-2x+2)e^x$.

1) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=2$ وأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

2) احسب $g'(x)$، ثم استنتج أنّ الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty\,;+\infty[$.

3) احسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty\,;+\infty[$.

II- نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $]-\infty\,;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x-(x^2-2x+2)e^x$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=-1-x^2e^x$. استنتج أنّ f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) أ) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=-x$ عند $-\infty$. ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة إلى (Δ).

ب) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مماسا $(\mathscr{D})$ موازيا للمستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلة له.

جـ) ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة إلى $(\mathscr{D})$ مع تحديد نقطة تقاطعهما A. ماذا تمثل النقطة A بالنسبة إلى $(\mathscr{C})$؟

4) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1{,}6<\alpha<-1{,}5$.

ب) ارسم (Δ)، $(\mathscr{D})$ والمنحني $(\mathscr{C})$ على المجال $]-\infty\,;1]$.

جـ) استعمل $(\mathscr{C})$ لتعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x)=-x+f(m)$ حلا وحيدا سالبا تماما.

5) لتكن h الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-\infty\,;+\infty[$ بـ: $h(x)=|x|+1-(x^2+2|x|+2)e^{-|x|}$.

أ) بيّن أنّ الدالة h زوجية، ثم اشرح كيفية رسم البيان $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة h وارسمه.

ب) دون حساب $h'(x)$، احسب النهايتين $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\dfrac{h(x)+1}{x}$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{h(x)+1}{x}$. ماذا تستنتج؟ فسّر النتيجة بيانيا.

انتهى

تصحيح فرض الفصل الأول 2021م

"عبد المطلب"

تمرين 1:

I-1) $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{x^2+4}{x^2}\right) - \frac{8}{x^2+4}\right] = 0$$

2) أ) $g'(x) = \frac{2x}{x^2+4} - \frac{2}{x} + \frac{16x}{(x^2+4)^2} = \frac{8(x^2-4)}{x(x^2+4)^2}$

ب) إشارة $g'(x)$:

x	0		2	
		$-$	0	$+$

$x \geq 2$: g متزايدة و لما $0 < x \leq 2$: g متناقصة

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2 - 1$	$\nearrow$	0

3) g مستمرة و متناقصة على المجال $]1;1,1[$ و $g(1) \simeq 0,01 > 0$ و $g(1,1) \simeq -0,07 < 0$ ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1 < \alpha < 1,1$.

إشارة $g(x)$:

x	1		α		$1,1$
		$+$	0	$-$	

II-1) أ) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ لأن $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

ب) $f(x) = x\left[\ln(x^2+4) - \ln x^2\right] = x\ln\left(\frac{x^2+4}{x^2}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} x f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) = \lim_{t\to 0^+} 4\,\frac{\ln(1+t)}{t} = 4$$

ومنه نجد أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x} = 0$

(C) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=0$

2) أ) $f'(x) = \ln(x^2+4) + \frac{2x^2}{x^2+4} - 2\ln x - 2$

$$f'(x) = \ln(x^2+4) - 2\ln x - \frac{8}{x^2+4} = g(x)$$

ب) $0 < x \leq \alpha$: f متزايدة ؛ و لما $x \geq \alpha$: f متناقصة

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

3) أ) $f''(x) = g'(x) = \frac{8(x^2-4)}{x(x^2+4)^2}$ $(x>0)$

$f''(x)=0$ لما $x=2$

x		2	
	$-$	0	$+$

ومنه: $A(2;\, 2\ln 2)$

ب) $y = f'(2)(x-2) + f(2) = (\ln 2 - 1)x + 2$ (Δ)

ب) لدينا $g(\alpha)=0$ و منه: $\ln\left(\frac{\alpha^2+4}{\alpha^2}\right) = \frac{8}{\alpha^2+4}$

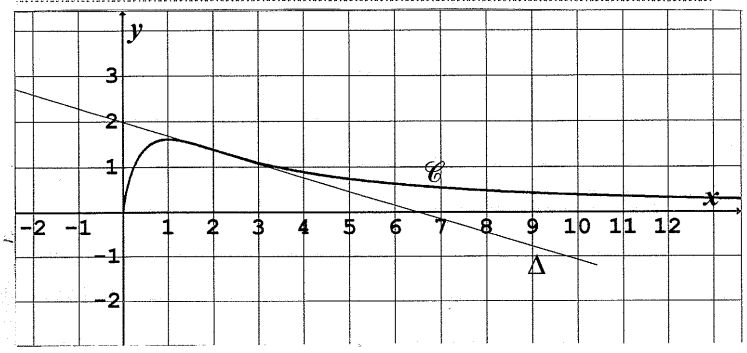
إذن: $f(\alpha) = \alpha\ln\left(\frac{\alpha^2+4}{\alpha^2}\right) = \frac{8\alpha}{\alpha^2+4}$

$1 < \alpha < 1,1$ ؛ $1 < \alpha^2 < 1,21$ ؛ $5 < \alpha^2+4 < 5,21$

$0,19 < \frac{1}{\alpha^2+4} < 0,2$ ؛ $8 < 8\alpha < 8,8$ ؛ ومنه:

$1,53 < \frac{8\alpha}{\alpha^2+4} < 1,76$ أي $1,53 < f(\alpha) < 1,76$

جـ) الرسم:



4) أ) $\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) = +\infty$

h غير قابلة للاشتقاق عند 0.

(C') يقبل مماسا عموديا $(x=0)$.

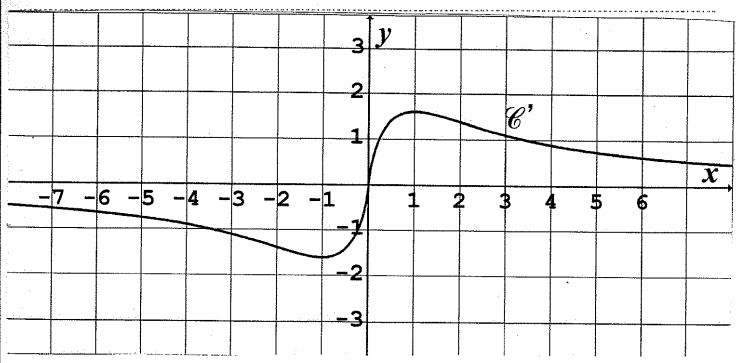
ب) $h(-x) = -x\ln\left(1+\frac{4}{(-x)^2}\right) = -x\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)$

$h(-x) = -h(x)$ ؛ و منه h دالة فردية.

$x>0$: $h(x) = f(x)$ و منه (C') يطابق (C).

$x<0$: $h(x) = -f(-x)$ ؛ و منه (C') يناظر (C) بالنسبة للمبدأ O.

رسم (C'):



جـ) لدينا B نظيرة A بالنسبة للمبدأ O، ومنه (Δ') يناظر (Δ) بالنسبة للمبدأ O.

$-y = (\ln 2 - 1)(-x) + 2$ ومنه: $y = (\ln 2 - 1)x - 2$ (Δ')

تمرين 2:

I-1) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(2 - x^2e^x + 2xe^x - 2e^x\right) = 2$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[xe^x\left(-x+2-\frac{2}{x}\right)+2\right] = -\infty$

2) $g'(x) = -\left[(2x-2)e^x + e^x(x^2-2x+2)\right]$

$g'(x) = -x^2e^x \leq 0$ ومنه: g متناقصة

3) $g(0) = 0$. إشارة $g(x)$: $+ \quad 0 \quad -$

II-1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-x - x^2e^x + 2xe^x - 2e^x\right) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left[-1-\left(x-2+\frac{2}{x}\right)e^x\right] = -\infty$

2) $f'(x) = -1 - \left[(2x-2)e^x + e^x(x^2-2x+2)\right]$

$f'(x) = -1 - x^2e^x = -(1+x^2e^x) < 0$

ومنه f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول التغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	$-\infty$

3) أ) $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-x^2e^x + 2xe^x - 2e^x\right) = 0$

ومنه: (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$.

الوضعية: ندرس إشارة $(f(x)+x)$.

$f(x)+x = (-x^2+2x-2)e^x$

لدينا: $-x^2+2x-2<0$ لأن $\Delta<0$ و $a=-1<0$

إذن: $f(x)+x<0$ ، ومنه (C) أسفل (Δ) $\forall x\in\mathbb{R}$

ب) $f'(x_0) = -1$ أي: $-1 - x_0^2e^{x_0} = -1$

ومنه: $-x_0^2e^{x_0} = 0$ أي $x_0 = 0$.

(D): $y = f'(0)(x-0) + f(0) = -x-2$

جـ) الوضعية: $f(x)+x+2 = g(x)$

ومنه: $x>0$: (C) أسفل (D) .

$x<0$: (C) أعلى (D) .

(D) يخترق (C) عند النقطة A حيث $A(0,-2)$

A تسمى نقطة إنعطاف.

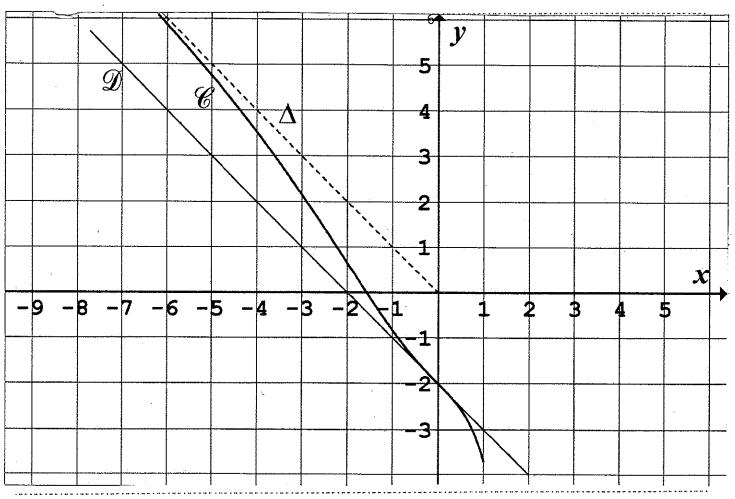
4) أ) f مستمرة ومتناقصة على $]-1,6;-1,5[$

$f(-1,6) \simeq 0,03 > 0$ و $f(-1,5) \simeq -0,12 < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $-1,6<\alpha<-1,5$

ب) رسم (Δ) ، (D) و (C).



جـ) $f(x) = -x + f(m)$. حلول هذه المعادلة عبارة عن فواصل نقاط تقاطع (C) مع المستقيمات الموازية لـ (Δ) و (D) . تقبل حلا وحيدا سالبا تماما يعني: $-2<f(m)<0$

ومنه: $\alpha<m<0$

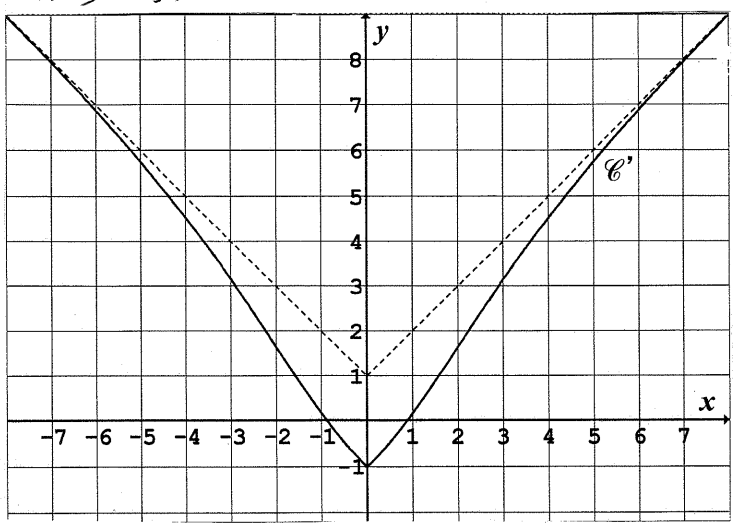
5) أ) $h(-x) = |-x|+1-\left((-x)^2+2|-x|+2\right)e^{-|-x|}$

$h(-x) = |x|+1-(x^2+2|x|+2)e^{-|x|} = h(x)$

ومنه: h زوجية.

$x<0$: $h(x) = f(x)+1$. (C') هو انسحاب (C) شعاعه $\vec{v}\binom{0}{1}$.

$x>0$: بما أن h زوجية نناظر (C') المرسوم لما $x<0$ بالنسبة لمحور التراتيب.



ب) $\lim_{x\to0^-}\frac{h(x)+1}{x} = \lim_{x\to0^-}\frac{-x+2-x^2e^x+2xe^x-2e^x}{x}$

$= \lim_{x\to0^-}\left[-1-x^2e^x+2e^x-2\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\right] = -1$

$\lim_{x\to0^+}\frac{h(x)+1}{x} = \lim_{x\to0^+}\left[1-x^2e^{-x}-2e^{-x}+2\left(\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)\right] = 1$

$h'_d(0) \neq h'_g(0)$ ومنه h غير قابلة للاشتقاق عند 0

$B(0;-1)$ نقطة زاوية. "عبد المطلب"