المؤسسة الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) دورة: ماي 2021

الشعبة: علوم تجريبية إعداد: عبد المطلب

بكالوريا تجريبي

اختبار في مادة: الرياضيات المدة: 3سا و30د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 6 - \dfrac{5}{u_n} \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 8 \\ v_{n+1} = 6 - \dfrac{5}{v_n} \end{cases}$.

1- أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $2 \le u_n \le 5$ و $5 \le v_n \le 8$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)، واستنتج أنّهما متقاربتان.

2- أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.

ب) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \le v_n - u_n \le 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. استنتج حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n)$.

3- لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرّفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = \dfrac{u_n - 5}{u_n - 1}$.

أ) بيّن أنّ (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأوّل w_0.

ب) اكتب عبارة كل من w_n و u_n بدلالة n، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$، $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

جـ) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \dfrac{1}{u_0 - 1} + \dfrac{5}{u_1 - 1} + \ldots + \dfrac{5^n}{u_n - 1}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحوي كيس ست كريات بيضاء مرقّمة من 1 إلى 6 وتسع كريات سوداء مرقّمة بـ: 0، 1، 2، 2، 2، 3، 3، 3، 3.

نسحب من هذا الكيس كريتين في آن واحد بطريقة عشوائية. الكريات متماثلة لا نفرّق بينها باللمس.

نسمي الحادثة A: "سحب كريتين لهما نفس اللّون"، والحادثة B: "سحب كريتين لهما نفس الرقم".

1- أ) احسب الاحتمالات التالية: $P(A)$، $P(B)$، $P(A \cap B)$، $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ و $P(A \cap \overline{B})$.

ب) احسب احتمال الحادثة C: سحب كريتين جداؤهما مضاعف للعدد 3.

2- نسمي a و b ترقيم الكريتين المسحوبتين، و X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب الفرق $a - b$ $(b \le a)$.

أ) عيّن مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X، ثم بيّن أنّ: $P(X = 2) = \frac{8}{35}$.

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X، ثم احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

3- نسحب الآن من هذا الكيس ثلاث كريات على التوالي بدون إعادة الكرية المسحوبة في كل مرة إلى الكيس.

أ) احسب احتمال الحادثة D: سحب ثلاث كريات من لونين مختلفين.

ب) لتكن الحادثة E: ظهور الرقم 2 مرة واحدة فقط والكرية المسحوبة ثانيا بيضاء. بيّن أنّ $P(E) = \frac{17}{91}$.

(في كل التمرين، تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

التمرين الثالث: (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقط A ، B و C لاحقاتها: $z_A=1$ ، $z_B=-i$ و $z_C=-1$. عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التعليل في كل حالة مما يلي:

1- طبيعة المثلث ABC: **أ)** متساوي الساقين وقائم **ب)** متساوي الأضلاع **ج)** متساوي الساقين.

2- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ العدد Z حيث: $Z=\left(\frac{z_A+z_B}{z_B+z_C}\right)^{2021}$. **أ)** $Z=1$ **ب)** $Z=-1$ **ج)** $Z=i$.

3- المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقّق $\left|\frac{2z-2}{z+i}\right|=2$ هي:

أ) المستقيم محور القطعة [AB] **ب)** القطعة المستقيمة [AB] **ج)** الدائرة التي قطرها [AB].

4- صورة المثلث AOB بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ هو المثلث: **أ)** COA **ب)** BOC **ج)** BOA.

5- المجموعة (F) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقّق $\arg\left(\frac{2z-2}{z+i}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ، $(k\in\mathbb{Z})$ هي:

أ) نصف دائرة قطرها [AB] وتشمل C ما عدا A و B **ب)** دائرة قطرها [AB] ما عدا A و B

ج) نصف دائرة قطرها [AB] وتشمل O ما عدا A و B.

6- الشكل الأسي للعدد المركب $e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{2\pi}{3}}$ هو: **أ)** $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ **ب)** $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ **ج)** $\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{(1+\ln x)^2}{x}$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$، ثم فسّر النتيجة بيانيا.

ب) بوضع $x=t^2$ ، بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}+2\frac{\ln t}{t}\right)^2$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وفسّر النتيجة بيانيا.

2- أ) أثبت أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ ، فإنّ $f'(x)=\frac{(1-\ln x)(1+\ln x)}{x^2}$ ، ثم ادرس إشارتها.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

ج) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة 1.

3- أ) أثبت أنّه لما $x\geq1$ ، $x+1+\ln x\geq0$ و $x-1-\ln x\geq0$. استنتج أنّه لما $x\geq1$ ، $f(x)-x\leq0$.

ب) ارسم المماس (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$.

4- أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي x حيث $1\leq x\leq2$ فإنّ: $1\leq f(x)\leq x$.

ب) لتكن $\mathscr{A}$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني $(\mathscr{C})$، حامل محور الفواصل، والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=2$ ، بيّن أنّ $1\leq\mathscr{A}\leq1{,}5$. احسب قيمة $\mathscr{A}$ بتقريب إلى0,01.

5- (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0=e$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $1\leq u_n\leq e$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n). استنتج أنّها متقاربة ثم احسب نهايتها.

6- g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x)=f(x^2)$. **أ)** بيّن أنّ الدالة g زوجية ثم شكّل جدول تغيراتها على $\mathbb{R}^*$.

ب) عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $g(x)=|m|$ ستة حلول متمايزة. بيان g غير مطلوب.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التعليل في كل حالة مما يلي:

1- نعتبر المتتالية العددية (u_n) حدودها أكبر تماما من 2-، ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\dfrac{-4}{u_n+4}$.

أ) المتتالية (u_n) متناقصة تماما **ب)** المتتالية (u_n) متزايدة تماما **ج)** المتتالية (u_n) غير رتيبة.

2- (v_n) و S_n متتاليتان معرّفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=(e^2-1)e^{2n}-2n+1$ و $S_n=v_0+v_1+...+v_n$.

عبارة S_n بدلالة n: أ) $S_n=e^{2n+2}-n^2+1$ **ب)** $S_n=e^{2n+2}-n^2+n$ **ج)** $S_n=e^{2n+2}-n^2$.

3- نعتبر المتتالية العددية (w_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_0=\dfrac{3}{2}$ و $w_{n+1}=2w_n-3$. عبارة الحد العام:

أ) $w_n=-3\times 2^{n-1}-3$ **ب)** $w_n=-3\times 2^{n-1}+3$ **ج)** $w_n=6\times 2^{n-1}-\dfrac{3}{2}$.

4- (x_n) و (y_n) متتاليتان معرّفتان على $\mathbb{N}^*$ بـ: $x_n=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ و $y_n=e^{x_1+x_2+...+x_n}$.

α) عبارة y_n بدلالة n: أ) $y_n=n+1$ **ب)** $y_n=\ln(n+1)$ **ج)** $y_n=e^{n+1}$.

β) $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n.y_n)$ تساوي: أ) صفر **ب)** واحد **ج)** $+\infty$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحوي كيس خمس كريات بيضاء تحمل الأعداد 1، e، e، e^2، e^2، وثلاث كريات سوداء تحمل الأعداد e، e، e^2، وثلاث كريات خضراء تحمل الأعداد 1، $\dfrac{1}{e}$، $\dfrac{1}{e^2}$. يرمز e إلى أساس اللوغاريتم النيبري.

نسحب من هذا الكيس كريتين في آن واحد بطريقة عشوائية. الكريات متماثلة لا نفرّق بينها باللمس.

نسمي الحادثة A: "سحب كريتين لهما لونين مختلفين"، والحادثة B: "سحب كريتين لهما العدد نفسه".

1- أ) احسب الاحتمالات التالية: $P(A)$، $P(B)$، $P(A\cap B)$، $P(A\cup B)$ و $P(A\cap\overline{B})$.

ب) احسب احتمال الحادثة C: سحب كريتين جداؤهما يساوي 1.

2- نسمي a و b العددين الظاهرين على الكريتين المسحوبتين. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب العدد $\ln(a\times b)$، حيث ln يرمز إلى اللوغاريتم النيبري.

أ) بيّن أنّ قيم المتغيّر العشوائي X هي ثمانية، وأنّ: $P(X=1)=\dfrac{1}{5}$.

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X، احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$، واحتمال الحادثة: "$X^2\leq 9$".

3- نسحب الآن من هذا الكيس ثلاث كريات على التوالي بدون إرجاع بحيث نرتبها حسب ظهورها.

أ) احسب احتمال الحادثة D: سحب كرية واحدة فقط بيضاء والكرية الأولى المسحوبة يجب أن تكون سوداء.

ب) احسب احتمال الحادثة E: سحب ثلاث كريات تحمل أعدادا تشكل حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها e.

(في كل التمرين، تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

التمرين الثالث: (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D لاحقاتها: $z_A = i$ ، $z_B = 2+3i$ ، $z_C = 2\sqrt{2}+i$ و $z_D = 2\sqrt{2}+2+3i$.

1- اكتب على الشكل الأسي العددين المركبين z_A و $\overline{z_B - z_A}$ ، ثم بيّن أنّ العدد $\left(\frac{\overline{z_B - z_A}}{z_A}\right)^{1442}$ تخيلي صرف.

2- أ) بيّن أنّ النقطة B هي صورة النقطة C بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

ب) بيّن أنّ D هي صورة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$. استنتج طبيعة الرباعي ACDB، ثم مثّله.

3- أ) عيّن قيسا بالراديان لكل من الزاوية $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$ والزاوية $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})$.

ب) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$.

4- أ) عيّن وأنشئ المجموعة (Γ_1) للنقط M من المستوي لاحقتها z التي تحقّق: $|z - z_A| = |z - z_B - 2\sqrt{2}|$.

ب) لتكن (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللّاحقة z التي تحقّق: $\arg\left(\frac{z - z_D}{z - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ،

حيث k عدد صحيح. تحقّق أنّ النقطة E ذات اللّاحقة $3i$ تنتمي إلى المجموعة (Γ_2)، ثم عيّن وأنشئ (Γ_2).

ج) اكتب على الشكل الجبري لاحقة النقطة F تقاطع المجموعتين (Γ_1) و (Γ_2).

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- نعتبر الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $g(x) = x^4 - 18x^2 + 1$.

1- شكّل جدول تغيرات الدالة g على المجال $]1;+\infty[$.

2- بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يحقّق $4{,}23 < \alpha < 4{,}24$. استنتج إشارة $g(x)$ لما $x > 1$.

II- نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = x - 4 + \frac{8e^{2x}}{e^{2x}-1}$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) أثبت أنّ: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(e^x)}{(e^{2x}-1)^2}$.

ب) بيّن أنّ: إذا كان $x \geq \ln\alpha$ فإنّ $f'(x) \geq 0$ و إذا كان $0 < x \leq \ln\alpha$ فإنّ $f'(x) \leq 0$.

2- أ) أثبت أنّ: من أجل كل x من المجال $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ ، الدالة f فردية. ماذا يمكن قوله عن $(\mathscr{C})$؟

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ، ثم فسّر هذه النتيجة بيانيا.

ج) شكّل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

3- أ) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = x - 4$ بجوار $-\infty$.

ب) استنتج أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ') بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ج) ارسم المستقيمين المقاربين المائلين (Δ) و (Δ')، والمنحني $(\mathscr{C})$. نأخذ $f(\ln\alpha) \approx 5{,}9$.

4- n عدد طبيعي أكبر تماما من 1. لتكن $\mathscr{A}(n)$ مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحني $(\mathscr{C})$، المستقيم ذي المعادلة $y = x + 4$ ، والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = \ln\sqrt{n}$ و $x = \ln\sqrt{n+1}$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1، فإنّ $\mathscr{A}(n) = 4\ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathscr{A}(n)$.

ب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1، نضع: $S_n = \mathscr{A}(2) + \mathscr{A}(3) + \ldots + \mathscr{A}(n)$.

بيّن أنّ: $S_n = 4\ln\left(\frac{2n}{n+1}\right)$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

انتهى الموضوع الثاني

تصحيح البكالوريا التجريبي 2021م

الموضوع الأول

عبد المطلب

تمرين 1:

1) أ) $2 \leq u_n \leq 5$ ؛ $n=0$ ، $u_0 = 2$ ومنه $2 \leq u_0 \leq 5$.

نفرض أن $2 \leq u_n \leq 5$ ونبرهن أن $2 \leq u_{n+1} \leq 5$.

لدينا : $2 \leq u_n \leq 5$ ، $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ ؛ $-\frac{5}{2} \leq \frac{-5}{u_n} \leq \frac{-5}{5}$

$2 \leq 6 - \frac{5}{u_n} \leq 5$ ومنه : $2 \leq u_{n+1} \leq 5$.

إذن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $2 \leq u_n \leq 5$.

$5 \leq v_n \leq 8$ ؛ $n=0$ ؛ $v_0 = 8$ ومنه : $5 \leq v_0 \leq 8$.

نفرض أن $5 \leq v_n \leq 8$ ونبرهن $5 \leq v_{n+1} \leq 8$.

لدينا : $5 \leq v_n \leq 8$ ، $\frac{1}{8} \leq \frac{1}{v_n} \leq \frac{1}{5}$ ؛ $-\frac{5}{5} \leq \frac{-5}{v_n} \leq \frac{-5}{8}$

$5 \leq 6 - \frac{5}{v_n} \leq \frac{43}{8} \leq 8$ ومنه : $5 \leq v_{n+1} \leq 8$.

إذن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $5 \leq v_n \leq 8$.

ب) $u_{n+1} - u_n = 6 - \frac{5}{u_n} - u_n = -\frac{(u_n-1)(u_n-5)}{u_n} > 0$

لأن $u_n - 5 < 0$ و $u_n - 1 > 0$ ومنه : (u_n) متزايدة تماما

$v_{n+1} - v_n = 6 - \frac{5}{v_n} - v_n = -\frac{(v_n-1)(v_n-5)}{v_n} < 0$

لأن $v_n - 5 > 0$ و $v_n - 1 > 0$ ومنه : (v_n) متناقصة تماما

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

(v_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

2) أ) $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{u_n} - \frac{5}{v_n} = \frac{5(v_n - u_n)}{u_n \cdot v_n}$

$2 \leq u_n \leq 5$ و $5 \leq v_n \leq 8$ ومنه : $10 \leq u_n \cdot v_n \leq 40$

$\frac{1}{40} \leq \frac{1}{u_n \cdot v_n} \leq \frac{1}{10}$ ومنه : $\frac{5(v_n - u_n)}{u_n \cdot v_n} \leq \frac{5(v_n - u_n)}{10}$

$(v_n \geq u_n)$ إذن : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

ب) $n=0$ ؛ $v_0 - u_0 = 6$ ومنه : $0 \leq v_0 - u_0 \leq 6$

نفرض أن $0 \leq v_n - u_n \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ونبرهن $0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا : $0 \leq v_n - u_n \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ نضرب في $\frac{1}{2}$:

$0 \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n) \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ولدينا : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

ومنه : $0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n) \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ إذن

$0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ومنه $0 \leq v_n - u_n \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to+\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ ومنه حسب مبرهنة الحصر $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

3) أ) $w_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 5}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{6u_n - 5}{u_n} - 5}{\frac{6u_n - 5}{u_n} - 1}$

$w_{n+1} = \frac{u_n - 5}{5(u_n - 1)} = \frac{1}{5}\left(\frac{u_n - 5}{u_n - 1}\right) = \frac{1}{5} w_n$

ومنه (w_n) م.ه. $q = \frac{1}{5}$ و $w_0 = -3$.

ب) $w_n = w_0 \cdot q^n = -3\left(\frac{1}{5}\right)^n$

$w_n = \frac{u_n - 5}{u_n - 1}$ ؛ $w_n u_n - w_n = u_n - 5$

$u_n(w_n - 1) = w_n - 5$ ومنه : $u_n = \frac{w_n - 5}{w_n - 1}$

$$u_n = \frac{-3\left(\frac{1}{5}\right)^n - 5}{-3\left(\frac{1}{5}\right)^n - 1} = \frac{3\left(\frac{1}{5}\right)^n + 5}{3\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1}$$

$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n = 5$ لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

بما أن $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ ومنه : $\lim_{n\to+\infty} v_n = 5$

ج) $w_n = \frac{u_n - 5}{u_n - 1} = 1 - \frac{4}{u_n - 1}$ ومنه : $\frac{1}{u_n - 1} = \frac{1 - w_n}{4}$

$\frac{5^n}{u_n - 1} = \frac{5^n(1 - w_n)}{4} = \frac{5^n - 5^n w_n}{4} = \frac{5^n + 3}{4}$

$S_n = \frac{5^0 + 3}{4} + \frac{5^1 + 3}{4} + \dots + \frac{5^n + 3}{4}$

$S_n = \frac{5^0 + 5^1 + \dots + 5^n + 3 + \dots + 3}{4} = \frac{\frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1} + 3(n+1)}{4}$

في الأخير : $S_n = \frac{5^{n+1} + 18n + 11}{16}$

تمرين 2:

1) أ) $P(A) = \frac{C_6^2 + C_9^2}{C_{15}^2} = \frac{17}{35}$

$P(B) = \frac{C_2^2 + C_4^2 + C_5^2}{C_{15}^2} = \frac{17}{105}$

$P(A \cap B) = \frac{C_3^2 + C_4^2}{C_{15}^2} = \frac{3}{35}$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = \frac{46}{105}$

$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{5}$

ب) الحادثة العكسية هي عدم وجود 0 أو 3 أو 6 .

$P(C) = 1 - \frac{C_8^2}{C_{15}^2} = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$

2) أ) $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(X=2) = \frac{C_4^1 \cdot C_1^1 + C_5^1 \cdot C_1^1 + C_1^1 \times C_4^1 + C_1^1 \times C_5^1 + 1}{C_{15}^2} = \frac{8}{35}$

$2-0 = 3-1 = 4-2 = 5-3 = 6-4 = 2$

ب) $3-3 = 2-2 = 1-1 = 0$ $P(X=0) = P(B) = \frac{17}{105}$

$P(X=1) = \frac{C_2^1 \cdot C_1^1 + C_4^1 \times C_2^1 + C_5^1 \times C_4^1 + C_1^1 \times C_5^1 + 1 + 1}{C_{15}^2} = \frac{37}{105}$

$1-0 = 2-1 = 3-2 = 4-3 = 5-4 = 6-5 = 1$

$P(X=3) = \frac{C_5^1 \cdot C_1^1 + C_1^1 \cdot C_2^1 + C_1^1 \cdot C_4^1 + C_1^1 \cdot C_5^1}{C_{15}^2} = \frac{16}{105}$

$3-0 = 4-1 = 5-2 = 6-3 = 3$

$4-0 = 5-1 = 6-2 = 4$ $P(X=4) = \frac{C_1^1 \cdot C_1^1 + C_1^1 \cdot C_2^1 + C_1^1 \cdot C_4^1}{C_{15}^2} = \frac{1}{15}$

$5-0 = 6-1 = 5$ $P(X=5) = \frac{C_1^1 \cdot C_1^1 + C_1^1 \cdot C_2^1}{C_{15}^2} = \frac{1}{35}$

$6-0 = 6$ $P(X=6) = \frac{C_1^1 \cdot C_1^1}{C_{15}^2} = \frac{1}{105}$

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{17}{105}$	$\frac{37}{105}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{16}{105}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{105}$

$E(X) = \frac{37}{105} + \frac{48}{105} + \frac{16}{35} + \frac{4}{15} + \frac{5}{35} + \frac{6}{105} = \frac{26}{15}$

3) أ) $P(D) = \frac{3(A_6^1 \times A_9^2 + A_9^1 \times A_6^2)}{A_{15}^3} = \frac{27}{35}$

أو: $P(D) = 1 - \frac{A_6^3 + A_9^3}{A_{15}^3}$. يمكن استعمال التوفيقية

ب) $P(E) = \frac{2(A_4^1 \times A_5^1 \times A_{10}^1) + A_1^1 \times A_{11}^2}{A_{15}^3} = \frac{17}{91}$

تمرين 3:

1) الاقتراح الصحيح هو أ) لأن:

$AC = 2$ و $AB = BC = \sqrt{2}$ و $AC^2 = AB^2 + BC^2$

ومنه: ABC قائم ومتساوي الساقين.

2) الاقتراح الصحيح هو ج) لأن:

$z = \left(\frac{1+i}{-1-i}\right)^{2021} = i^{2021} = (i^2)^{1010} \times i = i$

3) الاقتراح الصحيح هو أ) لأن:

$\left|\frac{2z-2}{z+i}\right| = 2\left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right| = 2$ ومنه $|z-z_A| = |z-z_B|$

$AM = BM$ إذن (E) هي محور القطعة $[AB]$.

5) الاقتراح الصحيح هو ج) لأن:

$\arg\left(2 \cdot \frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \arg 2 + \arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\arg\left(\frac{-2}{i}\right) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}$ لأن $O \in (F)$ و $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ومنه (F) نصف دائرة قطرها $[AB]$ وتشمل O ماعدا A و B

4) الاقتراح الصحيح هو ب) لأن:

$z' = e^{i(-\frac{\pi}{2})} z$. صورة O هي O (صامدة)

صورة A هي B: $z' = e^{i(-\pi/2)} z_A = -i$

صورة B هي C: $z' = e^{i(-\pi/2)} z_B = (-i)(-i) = -1$

ومنه صورة AOB هو BOC.

6) الجواب الصحيح هو ج) لأن:

$e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\pi/6}\left(1 + e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = e^{i\frac{\pi}{6}}(1+i)$

$= e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{12}}$

تمرين 4:

1) أ) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

$x = 0$ مقارب عمودي (محور التراتيب)

ب) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{t \to +\infty} \frac{(1+\ln t^2)^2}{t^2} = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{t} + \frac{2\ln t}{t}\right)^2 = 0$

$y = 0$ مقارب

2) أ) $f'(x) = \frac{\frac{2}{x}(1+\ln x)x - (1+\ln x)^2}{x^2} = \frac{(1+\ln x)(1-\ln x)}{x^2}$

إشارة $f'(x)$:

x	0		$\frac{1}{e}$		e	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

ب) f متزايدة تماما: $x \in \left]\frac{1}{e}, e\right[$

f متناقصة تماما: $x \in \left]0, \frac{1}{e}\right[\cup \left]e, +\infty\right[$

x	0		$1/e$		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

ج) نقطة التماس $A(1,1)$: $y = f'(1)(x-1) + f(1) = x$

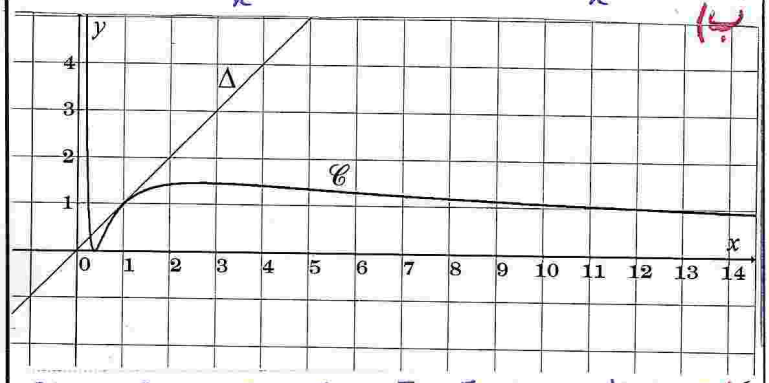
3) أ) $x \geq 1$: $x+1 \geq 2$ و $\ln x \geq 0$ ومنه: $x+1+\ln x > 0$

نضع: $h(x) = x - 1 - \ln(x)$ ، $h'(x) = \frac{x-1}{x} \geq 0$

على $h: x \geq 1$ متزايدة و $h(1) = 0$ ومنه: $h(x) \geq 0$

$f(x) - x = \frac{(1+\ln x)^2}{x} - x = -\frac{(x+1+\ln x)(x-1-\ln x)}{x} \leq 0$

ب)



4) أ) f متزايدة على $[1,2]$ ومنه: $f(1) \leq f(x) \leq f(2)$

وسابقا لما $1 \leq x \leq 2$: $f(x) \leq x$ ومنه: $1 \leq f(x) \leq x$

ب) $\int_1^2 1\,dx \leq \int_1^2 f(x)\,dx \leq \int_1^2 x\,dx$ ، $[x]_1^2 \leq A \leq \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$

ومنه: $1 \leq A \leq 1{,}5$ / $A = \left[\frac{(1+\ln x)^3}{3}\right]_1^2 = 1{,}28\ ua$

5) أ) $n = 0$: $u_0 = e$ و $1 \leq u_0 \leq e$ (محققة)

نفرض أن $1 \leq u_n \leq e$ ونبرهن $1 \leq u_{n+1} \leq e$

لدينا $1 \leq u_n \leq e$ و f متزايدة على $[1,e]$،

$f(1) \leq f(u_n) \leq f(e)$ أي $1 \leq u_{n+1} \leq \frac{4}{e} \leq 2$ محققة

ومنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq u_n \leq e$.

ب) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0$ حسب (P-3)

لأن $1 \leq u_n \leq e$ ومنه (u_n) متناقصة

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$ أي $f(\ell) = \ell$

ومنه: $\ell = 1$ لأن $f(x) = x$ لما $x = 1$ (الحساب)

6) أ) $x \in \mathbb{R}^*$ فإن $-x \in \mathbb{R}^*$ ، D_g متناظرة / 0

$g(-x) = f((-x)^2) = f(x^2)$ ومنه g زوجية

ندرسها على $]0,+\infty[$ ثم نستنتج دراستها على $]-\infty,0[$ وذلك بعكس إشارة فواصل نقاط منحنى g. (تناظر بالنسبة لمحور التراتيب)،

$g'(x) = 2x f'(x^2)$ $(x \in \mathbb{R}^*)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{e}$		$-\frac{1}{\sqrt{e}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

ب) حلول مختلفة: $0 < |m| < \frac{4}{e}$

$m \in \left]-\frac{4}{e}; 0\right[\cup \left]0, \frac{4}{e}\right[$

"عبد المطلب"

تصحيح البكالوريا التجريبي 2021م

الموضوع 2: عبد المطلب

تمرين 1:

1) الاقتراح الصحيح هو أ) لأن:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-4}{u_n+4}-u_n=-\frac{(u_n+2)^2}{u_n+4}<0$$

ومنه (u_n) متناقصة تماما.

2) الاقتراح الصحيح هو ج) لأن:

$2n+1$ متتالية حسابية حدها الأول 1 و $(e^2-1)e^{2n}$ متتالية هندسية أساسها e^2 وحدها الأول e^2-1.

$$S_n=(e^2-1)\left(\frac{e^{2n+2}-1}{e^2-1}\right)+\frac{n+1}{2}(1-2n+1)$$

$$S_n=e^{2n+2}-1+(n+1)(1-n)=e^{2n+2}-n^2$$

3) الاقتراح الصحيح هو ب) لأن:

$w_0=\frac{3}{2}$ و $w_1=2w_0-3=0$ وعند استعمال $w_n=-3\,2^{n-1}+3$

نجد: $w_0=\frac{3}{2}$ و $w_1=0$ ومنه محققة.

(يمكن استعمال البرهان بالتراجع)

4) الاقتراح الصحيح هو أ) للسؤال ج) و ب) لـ أ)

$$y_n=e^{\ln(1+\frac{1}{1})+\ln(1+\frac{1}{2})+\ln(1+\frac{1}{3})+\dots+\ln(1+\frac{1}{n})}$$

ج)

$$y_n=e^{\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\dots+\ln(\frac{n+1}{n})}$$

$$y_n=e^{\ln(2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\dots\times\frac{n+1}{n})}=e^{\ln(n+1)}=n+1$$

أ)

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

بوضع: $t=\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to+\infty}x_ny_n=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}+\ln(1+t)=1$$

تمرين 2:

1) أ)

$$P(A)=\frac{C_5^1\times C_6^1+C_3^1\times C_3^1}{C_{11}^2}=\frac{39}{55}$$

$$P(B)=\frac{C_2^2+C_4^2+C_3^2}{C_{11}^2}=\frac{2}{11}$$

$$P(A\cap B)=\frac{C_1^1\times C_1^1+C_2^1\times C_2^1+C_2^1\times C_1^1}{C_{11}^2}=\frac{7}{55}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{42}{55}$$

$$P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)=\frac{32}{55}$$

ب)

$1\times1=e\times\frac{1}{e}=e^2\times\frac{1}{e^2}=1$

$$P(C)=\frac{C_2^2+C_4^1\times C_1^1+C_3^1\times C_1^1}{C_{11}^2}=\frac{8}{55}$$

2) أ)

$$X=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$$

$1\times e=\frac{1}{e}\times e^2=e$

$$P(X=1)=\frac{C_2^1\times C_4^1+C_1^1\times C_3^1}{C_{11}^2}=\frac{11}{55}$$

ب)

$\frac{1}{e^2}\times\frac{1}{e}=e^{-3}$

$$P(X=-3)=\frac{C_1^1\times C_1^1}{C_{11}^2}=\frac{1}{55}$$

$\frac{1}{e^2}\times1=e^{-2}$

$$P(X=-2)=\frac{C_1^1\times C_2^1}{C_{11}^2}=\frac{2}{55}$$

$\frac{1}{e^2}\times e=\frac{1}{e}\times1=e^{-1}$

$$P(X=-1)=\frac{C_1^1\times C_4^1+C_1^1\times C_2^1}{C_{11}^2}=\frac{6}{55}$$

$P(X=0)=P(C)=\frac{8}{55}$ سابقا سؤال 1-ب

$e^2\times1=e\times e=e^2$

$$P(X=2)=\frac{C_3^1\times C_2^1+C_4^2}{C_{11}^2}=\frac{12}{55}$$

$e\times e^2=e^3$

$$P(X=3)=\frac{C_4^1\times C_3^1}{C_{11}^2}=\frac{12}{55}$$

$e^2\times e^2=e^4$

$$P(X=4)=\frac{C_3^2}{C_{11}^2}=\frac{3}{55}$$

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{55}$	$\frac{2}{55}$	$\frac{6}{55}$	$\frac{8}{55}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{3}{55}$

$$E(X)=\frac{-3}{55}-\frac{4}{55}-\frac{6}{55}+\frac{11}{55}+\frac{24}{55}+\frac{36}{55}+\frac{12}{55}=\frac{14}{11}$$

$$P(X^2\leq9)=P(-3\leq X\leq3)=1-P(X=4)=\frac{52}{55}$$

3) أ)

$$P(D)=\frac{2(A_3^1\times A_5^1\times A_5^1)}{A_{11}^3}=\frac{5}{33}$$

ب) $(1,e,e^2)$ أو $(\frac{1}{e},1,e)$ أو $(\frac{1}{e^2},\frac{1}{e},1)$:

$$P(E)=\frac{A_2^1\times A_4^1\times A_3^1+A_1^1\times A_2^1\times A_4^1+A_1^1\times A_1^1\times A_2^1}{A_{11}^3}=\frac{17}{495}$$

تمرين 3:

1) $z_A=e^{i\frac{\pi}{2}}$ و $\overline{z_B-z_A}=2-2i=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$\left(\frac{z_B-z_A}{z_A}\right)^{1442}=\left(\frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}\right)^{1442}=\left(2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)^{1442}$$

$$=(2\sqrt{2})^{1442}\cdot e^{-i\frac{4326\pi}{4}}=(2\sqrt{2})^{1442}e^{-i(1081\pi+\frac{\pi}{2})}$$

$$=2^{1442}\times2^{721}\times e^{i\frac{\pi}{2}}=2^{2163}i$$ تخيلي صرف

2) أ) $z'-z_A=e^{i\pi/4}(z-z_A)$ (الدوران)

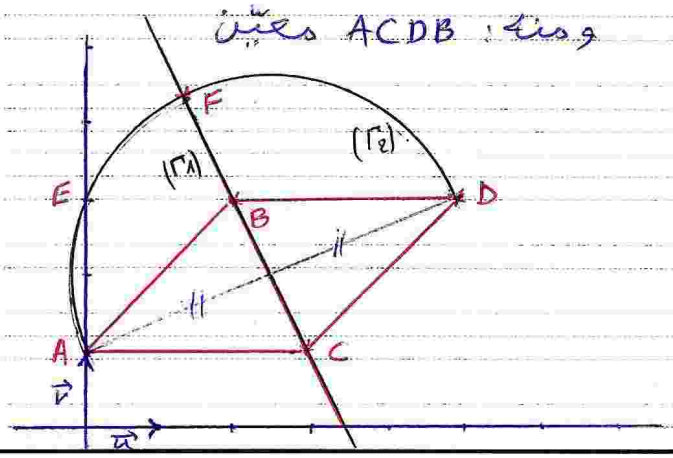
$$z_B-z_A=e^{i\frac{\pi}{4}}(z_C-z_A)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(2\sqrt{2})$$

ومنه: $z_B=2+3i$ (محققة)

ب) $z_D=z_C+z_{\vec{AB}}=z_C+z_B-z_A=2\sqrt{2}+2\sqrt{3}i$

$AB=AC$ (الدوران تقايس) و $\vec{CD}=\vec{AB}$ (من الانسحاب)

ومنه: ACDB معين



3) أ) لدينا $z_B - z_A = e^{i\pi/4}(z_C - z_A)$ ، ومنه

$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ أي $(\vec{AC}, \vec{AB}) = \frac{\pi}{4}$

$(\vec{AC}, \vec{AD}) = \frac{(\vec{AC}, \vec{AB})}{2} = \frac{\pi}{8}$ (معيّن)

ب) $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{2\sqrt{2} + 2 + 2i}{2\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

$\left|\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right| = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ و $\arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{8}$

ومنه: $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

و: $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

4) أ) $|z - z_A| = |z - z_D|$ أي $AM = DM$

المجموعة (Γ_1) هي محور القطعة $[AD]$

ب) $\arg\left(\frac{3i - z_D}{3i - z_A}\right) = \arg\left((\sqrt{2}+1)i\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ومنه $E \in (\Gamma_2)$.

$(\vec{AM}, \vec{DM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ومنه (Γ_2) هي (قوس) نصف الدائرة قطرها $[AD]$ وتشمل E باستثناء A و D

ج) $\left|\frac{z - z_D}{z - z_A}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z - z_D}{z - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$

منه: $\frac{z - z_D}{z - z_A} = i$ ، نجد: $z = \frac{z_D - i z_A}{1 - i}$

ومنه: $z_F = \sqrt{2} + (\sqrt{2}+3)i$

تمرين 4:

I-1) $g'(x) = 4x^3 - 36x = 4x(x^2 - 9)$

x	1		3		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$			
$g(x)$	-16	$\searrow$	-80	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) g مستمرة ومتزايدة تماما على $]4,23 ; 4,24[$

$g(4,23) \simeq -0,916 < 0$ و $g(4,24) \simeq 0,597 > 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $4,23 < \alpha < 4,24$.

إشارة $g(x)$:

1		α	
	$-$	0	$+$

II-1) أ) $f'(x) = 1 + 8\left(\frac{2e^{2x}(e^{2x}-1) - 2e^{4x}}{(e^{2x}-1)^2}\right) = 1 - \frac{16e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$

$f'(x) = \frac{e^{4x} - 18e^{2x} + 1}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{g(e^{2x})}{(e^{2x}-1)^2}$

ب) $g(x) \geq 0$ و $e^{2x} \geq \alpha$ ومنه: $x \geq \alpha$ أي $x \geq \ln\alpha$

$1 < e^{2x} \leq \alpha$ و $g(e^{2x}) \leq 0$ ومنه: $0 < x \leq \ln\alpha$

2) أ) $x \in \mathbb{R}^*$ كذلك $-x \in \mathbb{R}^*$ ؛ $f(x) = x + 4\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right)$

$f(-x) = -x + 4\left(\frac{e^{-2x}+1}{e^{-2x}-1}\right) = -x + 4\left(\frac{e^{2x}+1}{1-e^{2x}}\right) = -f(x)$

ومنه f فردية. $(\mathcal{C})$ يقبل كمركز تناظر المبدأ O

ب) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x - 4 + \frac{8e^{2x}}{e^{2x}(1-e^{2x})}\right] = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x\to 0^+}(e^{2x} - 1) = 0^+$

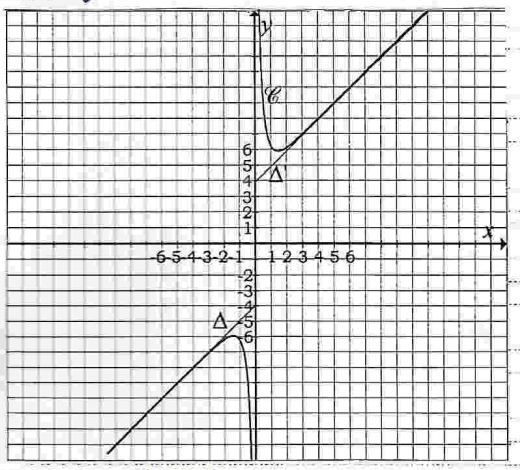
$x = 0$: مستقيم مقارب عمودي لـ $(\mathcal{C})$.

ج) بما أن f فردية نشكل جدول التغيرات لما $x > 0$ ، ثم نناظر على النقاط بالنسبة للمبدأ O لنتحصل على:

x	$-\infty$		$-\ln\alpha$		0		$\ln\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-\ln\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\ln\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ) $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - x + 4] = \lim_{x\to-\infty}\frac{8e^{2x}}{e^{2x}-1} = 0$

ب) و ج)



f فردية ومنه نظير (Δ) بالنسبة للمبدأ O هو $-y = -x - 4$

أي $y = x + 4$

وهي معادلة (Δ) .

$\ln\alpha \simeq 1,44$

$f(\ln\alpha) \simeq 5,9$

4) أ) $A(n) = \int_{\ln\sqrt{n}}^{\ln\sqrt{n+1}} (f(x) - x - 4)\,dx = \int_{\ln\sqrt{n}}^{\ln\sqrt{n+1}}\left(-8 + 8\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\right)dx$

$A(n) = \left[-8x + 4\ln(e^{2x}-1)\right]_{\ln\sqrt{n}}^{\ln\sqrt{n+1}}$ (حيز (Δ) و $(\mathcal{C})$)

$A(n) = -8\ln\sqrt{n+1} + 4\ln(n+1-1) + 8\ln\sqrt{n} - 4\ln(n-1)$

$A(n) = -4\ln(n+1) + 4\ln n + 4\ln n - 4\ln(n-1)$

$A(n) = 4\ln n^2 - 4\ln(n^2-1) = 4\ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$

$\lim_{n\to+\infty} A(n) = 4\ln 1 = 0$

ب) نضع: $h(x) = -8 + \frac{8e^{2x}}{e^{2x}-1}$

$S_n = \int_{\ln\sqrt{2}}^{\ln\sqrt{3}} h(x)\,dx + \int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{4}} h(x)\,dx + \dots + \int_{\ln\sqrt{n}}^{\ln\sqrt{n+1}} h(x)\,dx$

باستعمال علاقة شال: $S_n = \int_{\ln\sqrt{2}}^{\ln\sqrt{n+1}} h(x)\,dx$

$= -8\ln\sqrt{n+1} + 4\ln n + 8\ln\sqrt{2}$

$S_n = 4\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + 4\ln 2 = 4\ln\left(\frac{2n}{n+1}\right)$

$\lim_{+\infty} S_n = 4\ln 2$ (أو البرهان بالتدرج)

عبد المطلب