الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية" المادة: رياضيات	**اختبار** **الفصل الأول**	الموسم الدراسي: 2022/2021م المدة: ساعتان ونصف (2سا 30د) إعداد: عبد المطلب

تمرين1 (3نقاط)

إليك جدول تغيرات الدالة f المعرّفة والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$، وليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني.

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة مما يلي:

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	4	↘	2

1) النقطة $A(-2;-3)$ تنتمي إلى المنحني $(\mathscr{C})$.

2) $B(0;-2)$ هي نقطة انعطاف للمنحني $(\mathscr{C})$.

3) $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين: $y=2$ و $x=1$.

4) المعادلة $f(x)=1$ تقبل ثلاثة حلول في $\mathbb{R}-\{1\}$.

5) $f(3)>f(2)$ و $f(4)>f(5)$.

6) إذا علمت أنّ $f(-1)=0$ و $f'(-1)=-12$ فإنّ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2-1)}{x}=-12$.

تمرين2 (8نقاط)

نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\dfrac{2}{x+1}+\ln(x+1)-\ln x$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=x$ عند $+\infty$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f'(x)=\dfrac{x^3+2x^2-2x-1}{x(x+1)^2}$.

ب) احسب $f'(1)$، ثم بيّن أنّ إشارة $f'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ من إشارة $(x-1)$.

ج) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) نعتبر الدالة g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\dfrac{2}{x+1}-\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

أ) احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) بيّن أنّ الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

ج) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل (Δ).

4) أ) اكتب معادلة المستقيم (Δ') الذي يوازي المستقيم (Δ) ويشمل النقطة $A(1\,;\,2+\ln 2)$.

ب) ارسم المستقيمين (Δ) و (Δ') والمنحني $(\mathscr{C})$.

ج) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m $(m>0)$ التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x)=x+\ln m$ حلا أكبر تماما من 1.

5) h الدالة العددية المعرّفة على المجال $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[$ بـ: $h(x)=f(-2x+1)$.

دون حساب عبارة $h(x)$ ادرس اتّجاه تغيّر الدالة h على المجال $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[$.

تمرين3 (9نقاط)

I- g الدالة العددية المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^{x+1}-(x+1)e^{x}-1$.

1) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-1$ وأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

2) بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$، $g'(x)=(-x-2+e)e^{x}$، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة g.

3) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجموعة $\mathbb{R}$ حلين: أحدهما -1، والآخر α حيث: $1{,}4<\alpha<1{,}5$.

4) استنتج إشارة $g(x)$ على المجموعة $\mathbb{R}$.

II- f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2e^{x}+x-e}{e^{x}-1}$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$، فسّر النتيجة هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$، فسّر النتيجة هندسيا.

2) أ) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=-x+e$ عند $-\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ) مع تحديد نقطة تقاطعهما.

ج) بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{0\}$، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^{x}-1)^{2}}$، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3) أ) بيّن أنّ $e-\alpha=1+e^{-\alpha}$ و $f(\alpha)=2+e^{-\alpha}$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث: $0{,}2<\beta<0{,}3$.

4) أ) ارسم المستقيم (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$. اعتبر $f(\alpha)\approx 2{,}2$ و $f(-1)\approx 4{,}7$.

ب) m وسيط حقيقي. باستعمال $(\mathscr{C})$ بيّن أنّ المعادلة $\dfrac{x-e+2}{e^{x}-1}=e^{m}$ تقبل حلين موجبين تماما من أجل $m<-\alpha$.

ج) بيّن أنّ معادلة المماس للمنحني $(\mathscr{C})$ عند نقطة تقاطع $(\mathscr{C})$ مع حامل محور الفواصل هي: $y=\dfrac{2e^{\beta}+1}{e^{\beta}-1}(x-\beta)$.

بالتوفيق

تصحيح اختبار الفصل الأول 2021م

تمرين 1: عبد المطلب

1) خطأ: لأن $f(-2) > -2$.
من أجل $x < 0$ ، $f(x) > -2$.

2) صحيح: لأن $f'(x)$ انعدمت عند 0 ولم تغيّر إشارتها.

3) صحيح: لأن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ ، و $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$.

4) خطأ: المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلين فقط أحدهما في $]-\infty;1[$ ، والآخر في $]1;3[$.

5) صحيح: $f(3) > f(2)$ لأن f متزايدة على $]1;3]$ و $f(4) > f(5)$ لأن f متناقصة على $[3;+\infty[$.

6) خطأ: نضع: $g(x) = f(x^2-1)$ ؛
$g'(x) = 2x \cdot f'(x^2-1)$.
$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0) = 0$$

تمرين 2:

1) أ)
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x + \frac{2}{x+1} + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right] = +\infty$$

$\lim_{x\to 0^{>}} f(x) = +\infty$ ، لأن $\lim_{x\to 0^{>}} \ln x = -\infty$

$x = 0$ مستقيم مقارب لـ $(\mathscr{C})$.

ب)
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x+1} + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = 0$$

$y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ $(\mathscr{C})$

2) أ)
$$f'(x) = 1 - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = \frac{x(x+1)^2 - 2x + x(x+1) - (x+1)^2}{x(x+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 2x - 1}{x(x+1)^2}$$

ب) $f'(1) = 0$. بعد التحليل نجد:
$$f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+3x+1)}{x(x+1)^2}$$
بما أن $x > 0$ فإن $x^2+3x+1 > 0$
ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x-1)$

		1	
	−	0	+

جـ) f متزايدة تماما لما $x \geq 1$.
f متناقصة تماما لما $0 < x \leq 1$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$2+\ln 2$	↗	$+\infty$

3) أ) $\lim_{x\to 0^{>}} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

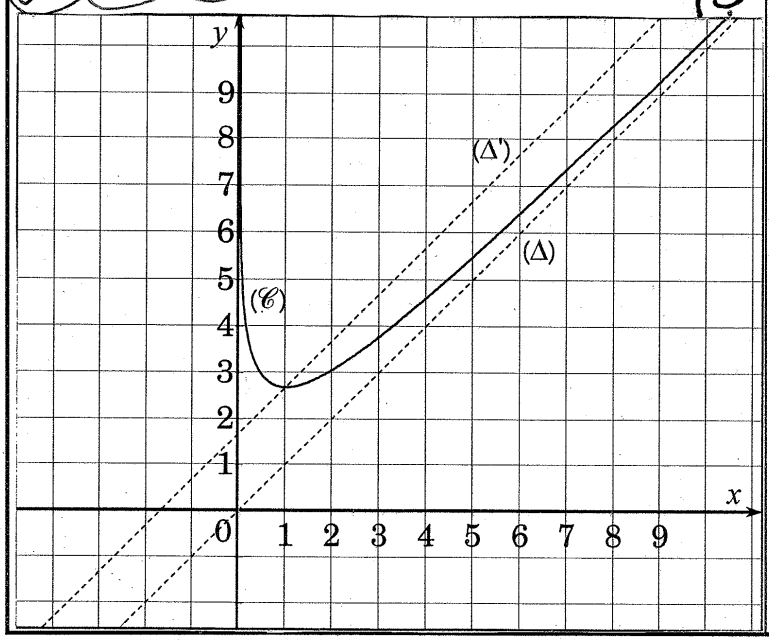
ب)
$$g'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$$
$$g'(x) = \frac{-3x-1}{x(x+1)^2} < 0$$ لأن $x > 0$.
ومنه g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$.
$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ ومنه $g(x) > 0$.

يمكن دراسة إشارة $g(x)$ دون $g'(x)$

جـ) $f(x) - y = g(x) > 0$
ومنه المنحنى $(\mathscr{C})$ أعلى (Δ).

4) أ) $y = x + a$ (الميل يساوي 1)
و $A(1;2+\ln 2)$ تنتمي إلى (Δ')
ومنه $2+\ln 2 = 1 + a$ ومنه (Δ'): $y = x + 1 + \ln 2$

ب)



جـ) $f(x) = x + \ln m$ تقبل حلا $x > 1$:

$0 < \ln m < 1 + \ln 2$ ومنه $1 < m < 2e$

5) $h'(x) = -2f'(-2x+1)$

$h'(x) = 0$ لما $-2x+1 = 1$ أي $x = 0$

$f'(-2x+1) > 0$ لما $-2x+1 > 1$ أي $x < 0$

$f'(-2x+1) < 0$ لما $-2x+1 < 1$ أي $0 < x < \frac{1}{2}$

* $x < 0$: $h'(x) < 0$ ، ومنه h متناقصة تماما

* $0 < x < \frac{1}{2}$: $h'(x) > 0$ ، ومنه h متزايدة تماما

تمرين 3 :

I-1) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(\cancelto{0}{e^x} - \cancelto{0}{xe^x} - \cancelto{0}{e^x} - 1) = -1$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}[e^x(e-x-1)-1] = -\infty$

2) $g'(x) = e^{x+1} - [e^x + e^x(x+1)]$

$g'(x) = e^x.e - (x+2)e^x = e^x(-x-2+e)$

x	$-\infty$		-1		$e-2$		α		$+\infty$
$g'(x)$			$+$		0		$-$		
$g(x)$	-1	↗	0	↗	$e^{e-2}-1$	↘	0	↘	$-\infty$

3) $g(-1) = 0$. g مستمرة ومتناقصة تماما على $]1,4;1,5[$. $g(1,4) \simeq 0,29 > 0$ ؛ $g(1,5) \simeq -0,02 < 0$. حسب مبرهنة القيم المتوسطة : $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α .

4) إشارة $g(x)$:

		-1		α	
	$-$	0	$+$	0	$-$

II-1) أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(2+\cancelto{0}{\frac{x}{e^x}} - \frac{e}{x})}{e^x(1-\frac{1}{e^x})} = 2$

$y = 2$ مستقيم مقارب لـ $(\mathscr{C})$.

ب) $\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x) = -\infty$

$x = 0$ مستقيم مقارب لـ $(\mathscr{C})$.

2) أ) $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\cancelto{0}{e^x} + \cancelto{0}{xe^x} - \cancelto{0}{e^x}}{e^x - 1} = 0$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل في جوار $-\infty$

ب) $f(x) - y = \frac{e^x(x+2-e)}{e^x-1}$

x	$-\infty$		0		$e-2$		$+\infty$
$x+2-e$		$-$		$-$	0	$+$	
e^x-1		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-y$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

$x \in]-\infty;0[\cup]e-2;+\infty[$ ، $(\mathscr{C})$ فوق (Δ)

$x \in]0;e-2[$ ، $(\mathscr{C})$ تحت (Δ) .

$(\mathscr{C})$ يقطع (Δ) عند $A(e-2;2)$.

جـ) $f'(x) = \frac{(2e^x+1)(e^x-1) - e^x(2e^x+x-e)}{(e^x-1)^2}$

$f'(x) = \frac{-e^x - 1 - xe^x + e.e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x-1)^2}$

x	$-\infty$		-1		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-1)$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	2

3) أ) $g(\alpha) = 0$ $e^\alpha(e-\alpha-1) - 1 = 0$

$e - \alpha - 1 = \frac{1}{e^\alpha} = e^{-\alpha}$ ومنه $e - \alpha = e^{-\alpha} + 1$

$f(\alpha) = \frac{2e^\alpha + \alpha - e}{e^\alpha - 1} = \frac{(2e^\alpha - e^{-\alpha} - 1)e^\alpha}{(e^\alpha-1)e^\alpha}$

$f(\alpha) = \frac{2e^{2\alpha} - e^\alpha - 1}{e^\alpha(e^\alpha-1)} = \frac{(e^\alpha-1)(2e^\alpha+1)}{(e^\alpha-1)e^\alpha} = 2 + e^{-\alpha}$

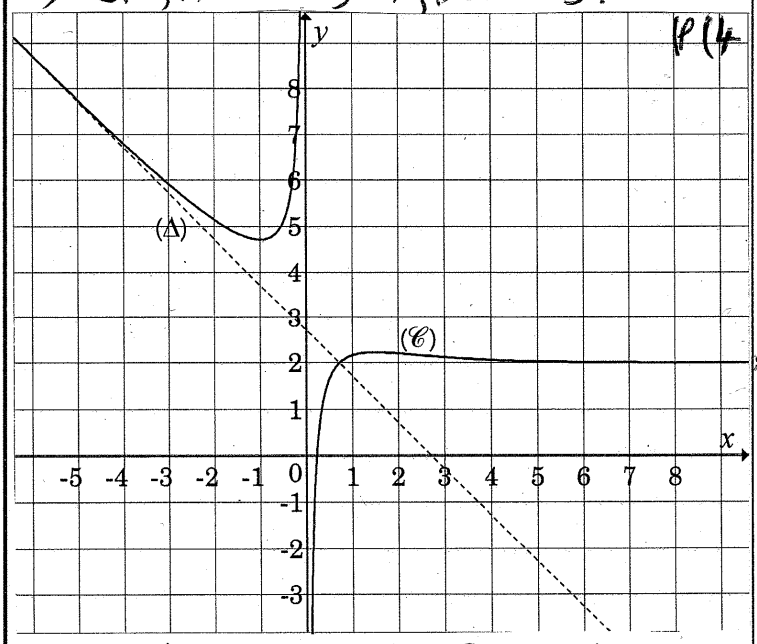
$2,22 < f(\alpha) < 2,25$

ب) f مستمرة ومتزايدة تماما على $]0,2;0,3[$

$f(0,2) \simeq -0,34 < 0$ و $f(0,3) \simeq 0,8 > 0$ ومنه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا

4) أ)



ب) $f(x) = e^m + 2$ ، $2 < e^m + 2 < 2 + e^{-\alpha}$

$0 < e^m < e^{-\alpha}$ ؛ ومنه $m < -\alpha$

جـ) $f(\beta) = 0$ ، $e - \beta = 2e^\beta$ ، $y = f'(\beta)(x-\beta)$ لأن $f(\beta) = 0$

$f'(\beta) = \frac{(e-\beta)e^\beta - e^\beta - 1}{(e^\beta-1)^2} = \frac{2e^{2\beta} - e^\beta - 1}{(e^\beta-1)^2} = \frac{(e^\beta-1)(2e^\beta+1)}{(e^\beta-1)^2} = \frac{2e^\beta+1}{e^\beta-1}$