الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية" المادة: رياضيات	**اختبار** **الفصل الثاني**	الموسم الدراسي: 2022/2021 المدة: ثلاث ساعات (3سا) إعداد: عبد المطلب

تمرين 1 (04نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. M نقطة لاحقتها العدد المركب $z = x+iy$ ، x و y عددين حقيقيين. من أجل كل عدد $z \neq -2$ نضع: $Z = \dfrac{z}{z+2}$. A و B نقطتان لاحقتاهما: $z_A = -2$ و $z_B = -1$.

1) بيّن أنّ الكتابة الجبرية للعدد المركب Z هي: $Z = \dfrac{x^2+y^2+2x}{(x+2)^2+y^2} + i\,\dfrac{2y}{(x+2)^2+y^2}$.

2) لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التبرير.

	السؤال	الإجابة أ)	الإجابة ب)	الإجابة ج)
1	المجموعة E_1 للنقط M حتى يكون Z عددا حقيقيا هي:	مستقيم معادلته $y=0$ باستثناء A	دائرة مركزها B ونصف قطرها 1 باستثناء A	المستقيم (AB)
2	المجموعة E_2 للنقط M حتى يكون Z تخيليا صرفا هي:	المستقيم (OA) باستثناء A	دائرة مركزها A ونصف قطرها 1 باستثناء B	دائرة مركزها B ونصف قطرها 1 باستثناء A
3	المجموعة E_3 للنقط M حتى تكون $\lvert Z\rvert = 1$ هي:	مستقيم معادلته $x=0$	مستقيم معادلته $x=-1$	مجموعة خالية
4	المعادلة $Z = \bar{z} - 1$ تقبل:	حلا وحيدا	حلين متمايزين	ثلاثة حلول

تمرين 2 (05نقاط)

كيس يحتوي على خمس كريات حمراء مرقمة من 1 إلى 5 ، و أربع كريات سوداء تحمل الأرقام التالية: 0 ، 1 ، 1 ، 2.

نسحب عشوائيا من هذا الكيس وبلا اختيار ثلاث كريات في آن واحد. نعتبر الحوادث التالية:

الحادثة A: سحب ثلاث كريات من نفس اللون.

الحادثة B: سحب كرية حمراء مرقمة بـ 1 وكرية سوداء واحدة فقط مرقمة بـ 1.

الحادثة C: سحب كريتين فقط تحملان رقمين متساويين أو ثلاث كريات مرقمة بنفس الرقم.

الحادثة D: سحب ثلاث كريات تحمل ثلاثة أرقام مختلفة مثنى مثنى.

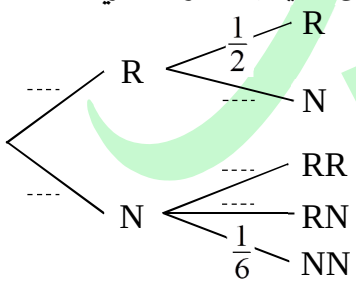
1) احسب الاحتمالات $p(A)$ ، $p(B)$ ، $p(C)$ ، واستنتج حساب الاحتمال $p(D)$.

2) احسب $p(A\cap D)$ و $p_{\bar{A}}(D)$ احتمال الحادثة D علما أنّ الكريات المسحوبة من لونين مختلفين.

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب، عدد الكريات الحمراء التي تحمل رقما فرديا.

عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، واحسب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X.

4) نسحب الآن كرية واحدة من الكيس. إذا ظهرت كرية حمراء نضعها جانبا ونسحب من الكيس عشوائيا كرية واحدة، وإذا ظهرت كرية سوداء نعيدها إلى الكيس ونسحب منه عشوائيا كريتين في آن واحد.



أ) أنقل ثم أكمل شجرة الإحتمالات المقابلة التي تنمذج هذه الوضعية.

ب) احسب احتمال أن يوجد على الأقل ثلاث كريات سوداء في الكيس.

(في كل التمرين، تعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

تمرين3 (04نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدها الأول u_0، حيث $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = u_n + \ln(n+2)$.

1) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $\ln(n+2) > 0$ ثم ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

2) برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \ln[(n+1)!]$.

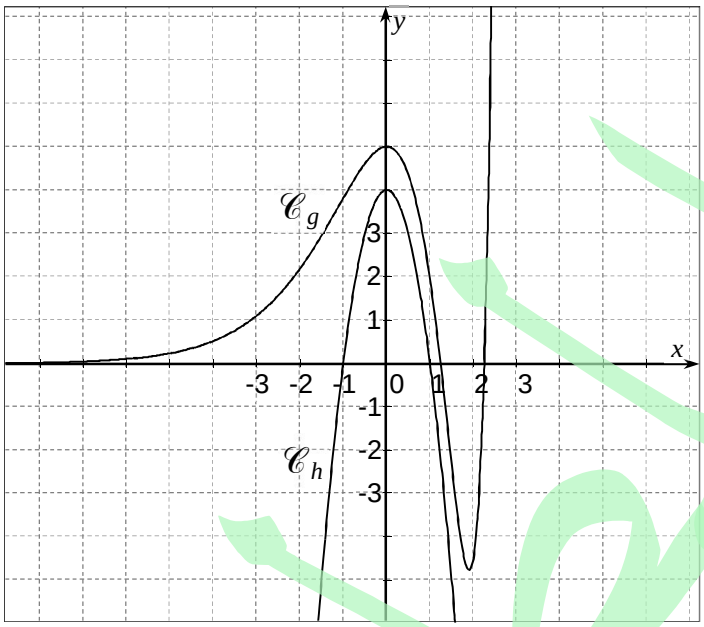
3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \dfrac{e^{u_n}}{n!} + n$.

أ) تحقّق أنّ: $v_n = 2n+1$، ثم استنتج طبيعة المتتالية (v_n)، واحسب حدّها الأول v_0.

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \ldots \times e^{v_n}$ و $S_n = \dfrac{1}{e^{v_0}} + \dfrac{1}{e^{v_1}} + \ldots + \dfrac{1}{e^{v_n}}$.

احسب P_n و S_n بدلالة n، واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

تمرين4 (07نقاط)



I- في الشكل المقابل $(\mathscr{C}_g)$ و $(\mathscr{C}_h)$ التمثيلان البيانيان للدالتين العدديتين g و h المعرّفتين على $\mathbb{R}$ بـ:

$g(x) = e^{2x} + 2(2-3x)e^x$ و $h(x) = -4x^2 + 4$.

1) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

2) بقراءة بيانية، حدّد وضعية $(\mathscr{C}_g)$ بالنسبة لـ$(\mathscr{C}_h)$.

3) استنتج مما سبق إشارة $g(x) - h(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x - 2x} + x + 1$.

$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$، وبيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

ب) بيّن أنّ: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x) = \dfrac{g(x) - h(x)}{(e^x - 2x)^2}$. استنتج اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

ج) بيّن أنّ معادلة المماس (T) للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة x_0 حيث $x_0 = 0$ هي: $y = x$.

2) أ) بيّن أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتاهما على الترتيب: $y = x+1$ و $y = x+2$.

ب) نفرض أنّ: من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}$، $e^x > 2x$. ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة لكل من (Δ) و (Δ').

ج) نفرض أنّ: من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}$، $e^x \geq x+1$. ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة للمماس (T).

3) احسب $f(1{,}6)$، ثم ارسم المماس (T)، المستقيمين المقاربين المائلين (Δ) و (Δ')، والمنحني $(\mathscr{C}_f)$.

4) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $e^x(1-m) = 2(1-mx)$ حلين مختلفين في الإشارة.

5) λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1. احسب المساحة $\mathscr{A}(\lambda)$ للحيّز المستوي المحدّد بالمنحني $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيمات المعرّفة بالمعادلات التالية: $y = x+2$، $x = 1$ و $x = \lambda$، ثم عيّن نهاية $\mathscr{A}(\lambda)$ عندما λ يؤول إلى ما لا نهاية.

III- (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأول u_0، حيث $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = f(u_n)$.

بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$. استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

تصحيح اختبار الفصل الثاني 2022م

تمرين 2:

1) $P(A) = \frac{C_5^3 + C_4^3}{C_9^3} = \frac{1}{6}$

$P(B) = \frac{C_1^1 \times C_2^1 \times C_6^1}{C_9^3} = \frac{1}{7}$

$P(C) = \frac{C_3^2 \cdot C_6^1 + C_2^2 \cdot C_7^1 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{13}{42}$

$P(D) = 1 - P(C) = \frac{29}{42}$

2) $P(A \cap D) = \frac{C_5^3 + C_2^1 \cdot C_2^2}{C_9^3} = \frac{1}{7}$

$P_{\bar{A}}(D) = \frac{P(D \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(D) - P(A \cap D)}{1 - P(A)} = \frac{23}{35}$

3) $X = \{0; 1; 2; 3\}$

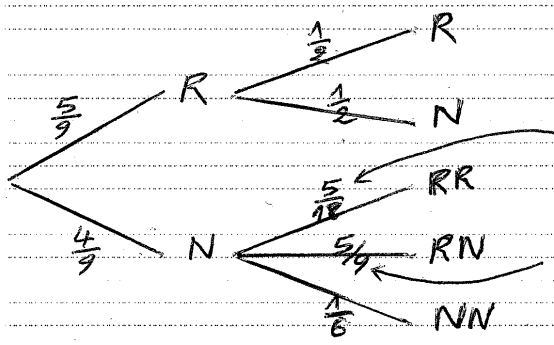
$P(X=0) = \frac{C_6^3}{C_9^3} = \frac{5}{21}$; $P(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_6^2}{C_9^3} = \frac{15}{28}$

$P(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_6^1}{C_9^3} = \frac{3}{14}$; $P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_9^3} = \frac{1}{84}$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$

$E(X) = 0 + \frac{15}{28} + \frac{6}{14} + \frac{3}{84} = 1$

4) أ)



ب) $P = P(R \cap R) + P(R \cap N) + P(N \cap RR) + P(N \cap RN) = 1 - P(N \cap NN) = \frac{25}{27}$

تمرين 1:

1) $Z = \frac{z}{z+2} = \frac{x+iy}{x+iy+2}$

$Z = \frac{(x+iy)(x+2-iy)}{(x+2+iy)(x+2-iy)}$

$(x,y) \neq (-2,0)$ $\left(Z = \frac{x^2+y^2+2x}{(x+2)^2+y^2} + i\frac{2y}{(x+2)^2+y^2} \right)$

2) 1- الإجابة الصحيحة هي (أ) لأن:

Z حقيقي يعني الجزء التخيلي معدوم $(y=0)$

(E_1) هي مستقيم معادلته $y=0$ ماعدا $A(-2,0)$

2- الإجابة الصحيحة هي (ج) لأن:

Z تخيلي صرف يعني الجزء الحقيقي معدوم

$x^2 + y^2 + 2x = 0$

$(x+1)^2 + (y-0)^2 = 1^2$

(E_2) هي الدائرة (C) التي مركزها $B(-1;0)$ ونصف قطرها $r=1$ ماعدا $A(-2,0)$.

3- الإجابة الصحيحة هي (ب) لأن:

$|Z| = 1$ يعني $\left|\frac{z}{z+2}\right| = 1$ أي $\frac{|z|}{|z+2|} = 1$

$|z| = |z+2|$ أي $|x+iy| = |x+2+iy|$

$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x+2)^2+y^2}$

$x^2 + y^2 = x^2 + 4x + 4 + y^2$

نجد $x=-1$ ومنه (E_3) هي مستقيم معادلته $x=-1$

4- الإجابة الصحيحة (ب) $\frac{z}{z+2} = \bar{z} - 1$

$z\bar{z} + 2(\bar{z} - z) - 2 = 0$

$(x+iy)(x-iy) + 2(x-iy-x-iy) - 2 = 0$

$x^2 + y^2 - 2 - 4yi = 0$

عند حل هذه الجملة نجد: $\begin{cases} x^2+y^2-2=0 \\ -4y=0 \end{cases}$ $x = \pm\sqrt{2}$ ، $y=0$ ومنه:

$z_1 = \sqrt{2}$ ، $z_2 = -\sqrt{2}$

تمرين 3:

1) $n \geq 0$ ؛ $n+2 \geq 2$ ؛ $\ln(n+2) \geq \ln 2 > 0$

ومنه: $\ln(n+2) > 0$.

$U_{n+1} - U_n = \ln(n+2) > 0$

ومنه: (U_n) متزايدة تماما.

2) $n=0$: $U_0 = \ln 1! = \ln 1 = 0$ (محققة)

نفرض أن $U_n = \ln(n+1)!$ ونبرهن صحة $U_{n+1} = \ln(n+2)!$

$U_{n+1} = U_n + \ln(n+2) = \ln(n+1)! + \ln(n+2)$

$= \ln(n+2)(n+1)! = \ln(n+2)!$

محققة، ومنه $U_n = \ln(n+1)!$ $\forall n \in \mathbb{N}$

3) أ) $V_n = \frac{e^{\ln(n+1)!}}{n!} + n = \frac{(n+1)!}{n!} + n$

$V_n = \frac{(n+1)\,n!}{n!} + n = n+1+n = 2n+1$

$V_{n+1} - V_n = 2(n+1)+1-2n-1 = 2$

ومنه (V_n) متتالية حسابية أساسها 2 و $V_0 = 1$

ب) $P_n = e^{V_0+V_1+\dots+V_n} = e^{\frac{n+1}{2}(V_0+V_n)}$

$= e^{\frac{n+1}{2}(2n+2)} = e^{(n+1)^2}$

$S_n = \left(\frac{1}{e}\right)^1 + \left(\frac{1}{e}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{e}\right)^{2n+1}$ مجموع متتالية هندسية أساسها $\left(\frac{1}{e}\right)^2$ وحدها الأول $\frac{1}{e}$.

$S_n = \frac{1}{e}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{2n+2}}{1-\left(\frac{1}{e}\right)^2}\right)$

$S_n = \frac{e}{e^2-1}\left(1-\left(\frac{1}{e}\right)^{2n+2}\right)$

$\lim_{n\to+\infty} P_n = +\infty$ و $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{e}{e^2-1}$ لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{2n+2} = 0$

تمرين 4:

I-1) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(e^{2x}+4e^x-6xe^x) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^x\left(\frac{e^x}{x}+\frac{4}{x}-6\right) = +\infty$

2) من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ (C_g) فوق (C_h).

3) $g(x)-h(x)>0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

II-1) أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1-\frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{2x}{e^x}\right)} + x + 1 = +\infty$

ب) $f'(x) = \frac{e^x(e^x-2x)-(e^x-2)(e^x-2)}{(e^x-2x)^2} + 1$

$f'(x) = \frac{e^{2x}+4e^x-6xe^x+4x^2-4}{(e^x-2x)^2} = \frac{g(x)-h(x)}{(e^x-2x)^2} > 0$

ومنه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جـ) $y = f'(0)(x-0)+f(0)$

$(T): y = x$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

2) أ) $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x-1) = 0$ (م.م.مائل $y=x+1$ بجوار $-\infty$)

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x-2) = 0$ (م.مقارب مائل $y=x+2$ بجوار $+\infty$)

ب) $f(x)-x-1 = \frac{e^x-2}{e^x-2x}$

$-$ $\ln 2$ $+$; (C_f) تحت (Δ) ; (C_f) فوق (Δ)

(C_f) يقطع (Δ) عند $A(\ln 2, \ln 2+1)$

$f(x)-x-2 = \frac{2x-2}{e^x-2x}$

$-$ 1 $+$; (C_f) تحت (Δ) ; (C_f) فوق (Δ)

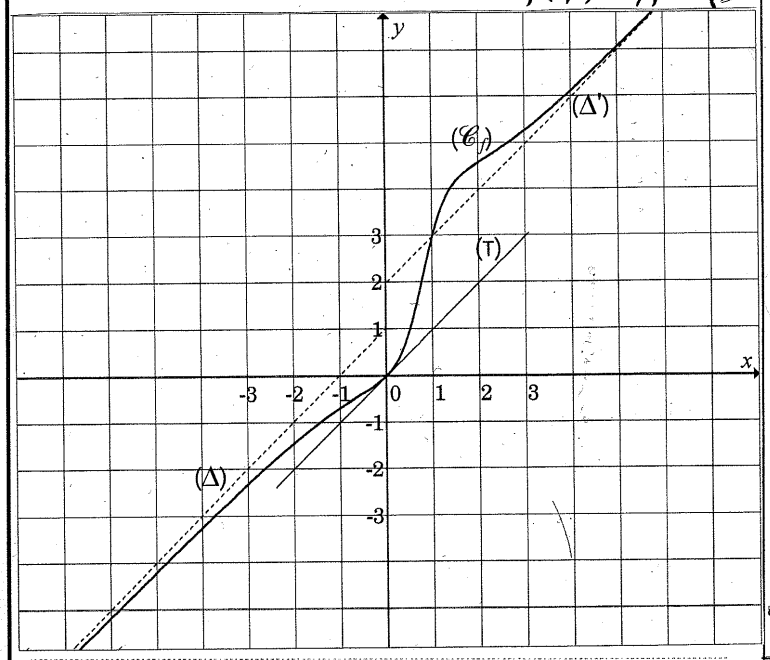
(C_f) يقطع (Δ) عند $B(1,3)$

جـ) $f(x)-x = \frac{2(e^x-x-1)}{e^x-2x} \geq 0$ لأن $e^x \geq x+1$

من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ (C_f) فوق المماس (T)

(C_f) يمس (T) عند المبدأ $O(0,0)$.

3) $f(1,6) \simeq 4,3$.



4) $e^x(1-m) = 2(1-mx)$

$e^x-2 = m(e^x-2x)$ ، نجد: $m = \frac{e^x-2}{e^x-2x}$

$m+x+1 = \frac{e^x-2}{e^x-2x} + x + 1$

$f(x) = x+m+1$ حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات التي ميلها 1.

حلين مختلفين في إشارة: $0 < m+1 < 1$

ومنه: $-1 < m < 0$

5) $A(\lambda) = \int_1^\lambda (f(x)-x-2)\,dx = \int_1^\lambda \left(\frac{e^x-2}{e^x-2x}-1\right)dx$

$A(\lambda) = \left[\ln(e^x-2x)-x\right]_1^\lambda$

$A(\lambda) = (\ln(e^\lambda-2\lambda)-\lambda-\ln(e-2)+1)$ u.a

$\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} \ln\left[e^\lambda\left(1-\frac{2\lambda}{e^\lambda}\right)\right]-\lambda+1-\ln(e-2)$

$= \lim_{\lambda\to+\infty} \ln\left(1-\frac{2\lambda}{e^\lambda}\right)+1-\ln(e-2) = 1-\ln(e-2)$ u.a

III- لنبرهن بالتراجع أن: $-1 \leq U_n \leq 0$.

$n=0$; $-1 \leq U_0 \leq 0$ (محققة)

نفرض أن $-1 \leq U_n \leq 0$ ونبرهن $-1 \leq U_{n+1} \leq 0$

$-1 \leq U_n \leq 0$; $f(-1) \leq f(U_n) \leq f(0)$ (f متزايدة)

$-1 \leq -0,69 \leq f(U_n) \leq 0$ ومنه: $-1 \leq U_{n+1} \leq 0$

إذن من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ $-1 \leq U_n \leq 0$

لدينا: $f(x) \geq x$ ومنه $f(U_n) \geq U_n$

$U_{n+1} \geq U_n$ ومنه (U_n) متزايدة.

(U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \ell$ ومنه $f(\ell) = \ell$

$\ell = 0$ لأن $f(0) = 0$

"عبد المطلب"