المؤسسة الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) دورة: ماي 2022

الشعبة: علوم تجريبية إعداد: عبد المطلب

بكالوريا تجريبي

اختبار في مادة: الرياضيات المدة: 3سا و30د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التعليل في كل حالة مما يلي:

1- الشكل الجبري للعدد المركب $\left[\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right]^{2022}$ هو: أ) 1 ب) -1 ج) $-i$.

2- الشكل الأسي للعدد المركب $\frac{6e^{i\frac{3\pi}{4}}.e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}$ هو: أ) $3e^{-i\frac{\pi}{12}}$ ب) $3e^{i\frac{\pi}{12}}$ ج) $3e^{i\frac{11\pi}{12}}$.

3- الشكل المثلثي لـ $\left[\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right]^{2}$ هو: أ) $2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$ ب) $2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ ج) $2(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6})$.

4- مجموعة حلول المعادلة $z^2-z.\bar{z}+2=0$ في $\mathbb{C}$ هي: أ) $S=\{-i;i\}$ ب) $S=\{-1;1\}$ ج) $S=\{i\}$.

5- مجموعة النقط M لاحقتها z التي تحقّق $|z+i|=1$ هي: أ) مستقيم ب) قطعة مستقيمة ج) دائرة.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

كيس به 9 كريات بيضاء مرقّمة من 1 إلى 9، و6 كريات سوداء مرقّمة من 1 إلى 6، لا نفرق بين الكريات باللمس.

I- نسحب من هذا الكيس وبطريقة عشوائية أربع كريات في آن واحد.

1- احسب p_1 احتمال سحب أربع كريات تحمل كل واحدة منها رقما زوجيا.

2- احسب p_2 احتمال سحب كرية واحدة على الأقل تحمل رقما فرديا.

3- احسب p_3 احتمال سحب أربع كريات تحمل أرقاما زوجية أو أربع كريات تحمل أرقاما فردية.

4- احسب p_4 احتمال سحب أربع كريات تحمل أرقاما فردية ومن لونين مختلفين.

5- احسب p_5 احتمال سحب كرية واحدة على الأقل تحمل رقما زوجيا أو كل الكريات من نفس اللون.

6- احسب p_6 احتمال سحب كريتين فقط تحملان رقمين فرديين إذا علمت أنّ كل الكريات من نفس اللّون.

7- ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات السوداء المتبقية في الكيس.

أ) برّر أنّ قيم المتغيّر العشوائي هي: 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6.

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X. ثم بيّن أنّ $E(X)=\frac{22}{5}$، واحسب $p(X^2-3X\leq 0)$.

II- نسحب الآن كرية من الكيس، إذا كان ترقيمها من مضاعفات 3 نرجعها إلى الكيس ونسحب كرية ثانية، وإذا كانت غير ذلك نضعها جانبا ونسحب كرية ثانية من الكيس. الحدث A_1: سحب الكرية الأولى التي ترقيمها من مضاعفات 3، والحدث A_2: سحب الكرية الثانية التي ترقيمها من مضاعفات 3. أنشئ شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية، ثم احسب $p(A_2)$ احتمال أن يكون في السحب الثاني كرية ترقيمها من مضاعفات 3.

(في كل التمرين، تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 8$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{u_n+4}$.

1- أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $u_n > 0$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما. استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

2- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} \le \dfrac{3}{4}u_n$ ، وأنّ $u_n \le 8\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \dfrac{1}{\dfrac{9}{8}\left(\dfrac{4}{3}\right)^n - 1}$. احسب مرّة أخرى نهاية u_n.

4- لتكن (v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = 1 + \dfrac{a}{u_n}$.

أ) عيّن قيمة العدد الحقيقي a حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{4}{3}$.

ب) نضع $a=1$، احسب بدلالة n: $S_n = \dfrac{1}{u_0} + \dfrac{1}{u_1} + \ldots + \dfrac{1}{u_n}$ و $S'_n = v_0 + 3v_1 + \ldots + 3^n v_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f و g الدالتان المعرّفتان على $[-1;+\infty[$ بـ: $f(x) = 3x^2 - 6x(1-e^{-x})$ و $g(x) = 3x^2 - 6x$.

وليكن $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ تمثيلهما البياني على الترتيب في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2- أ) بيّن أنّ $f'(x) = 6(x-1)(1-e^{-x})$ ، ثم ادرس إشارة $f'(x)$ على $[-1;+\infty[$.

ب) شكّل جدول تغيرات كل من f و g على المجال $[-1;+\infty[$.

3- بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[1;+\infty[$. تحقّق أنّ $1 < \alpha < 2$ ، ثم أعط حصرا للعدد α بتقريب 10^{-1}.

4- أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - g(x)]$. فسّر النتيجة بيانيا.

ب) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمنحني $(\mathscr{C}')$، ثم ارسم $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$.

5- بيّن أنّ معادلة المماس للمنحني $(\mathscr{C})$ عند $x_0 = \alpha$ هي $y = 3\alpha(\alpha-1)(x-\alpha)$.

6- أ) عيّن العددين الحقيقيين a و b ، بحيث تكون الدالة $x \mapsto (ax+b)e^{-x}$ أصلية الدالة $x \mapsto xe^{-x}$.

ب) نضع $I_\alpha = \int_0^\alpha [f(x) - g(x)]dx$. بيّن أنّ $I_\alpha = 3\alpha(\alpha-1)$ ، ثم أعط تفسيرا بيانيا للعدد I_α.

7- h الدالة العددية المعرّفة على $[-1;+\infty[$ بـ: $\begin{cases} h(x) = f(x) & -1 \le x \le 0 \\ h(x) = g(x) & x > 0 \end{cases}$ و $(\mathscr{H})$ تمثيلهما البياني.

أ) بيّن أنّ h غير قابلة للاشتقاق عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$. ماذا تمثل النقطة O بالنسبة لـ$(\mathscr{H})$؟

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة h على $[-1;+\infty[$.

جـ) ارسم نصفي المماسين لـ $(\mathscr{H})$ عند $x_0 = 0$ ، والمنحني $(\mathscr{H})$ في معلم آخر.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التبرير.

	السؤال	الإجابة أ)	الإجابة ب)	الإجابة ج)
1	المنحني $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{x}{e^x+1}$ ، يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته:	$y=x-1$	$y=x+1$	$y=x$
2	الدالة الأصلية للدالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{1}{x(\ln x+2)}$. والتي تنعدم عند $\frac{1}{e}$ هي:	$\frac{(\ln x+2)^2}{2}$	$\ln(\ln x+2)+1$	$\ln(\ln x+2)$
3	المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي $n\in\mathbb{N}^*$ بالعبارة: $v_n=n-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ، هي متتالية:	متزايدة تماما ومتباعدة	متناقصة تماما ومتباعدة	متزايدة تماما ومتقاربة
4	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرّفة بـ: $u_n=\int_n^{n+1} e^{2x}\,dx$. نضع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ ، عبارة S_n هي:	$\frac{1}{2}\left(e^{2n+2}-1\right)$	$\frac{1}{2}\left(e^{2n+2}-e^{2n}\right)$	$\frac{1}{2}\left(e^{2n+2}+1\right)$
5	$\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(e^{2x}-2x+3)-x]$ تساوي:	$-\infty$	$+\infty$	0
6	حلُّ المعادلة التفاضلية $y'+y=(2x+1)e^{-x}$ ، الذي يحقّق $y(-1)=0$ هو:	$(x^2-1)e^{-x}$	$(x^2+x+1)e^{-x}$	$(x^2+x)e^{-x}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لدينا ثلاثة أقفاص، في كل قفص عشرة طيور. القفص C_1 يحتوي على 6 من طائر الحسون (A) و4 من الكناري (B)، القفص C_2 يحتوي على 5 من طائر الحسون (A) و5 من الكناري (B)، القفص C_3 يحتوي على 7 من طائر الحسون (A) و3 من الكناري (B).

نرمي زهرة نرد مكعبة ومتوازنة لها ستة أوجه مرقّمة من 1 إلى 6. إذا ظهر الوجه الذي يحمل الرقم 3 نسحب طائرا واحدا من القفص C_1، وإذا ظهر الوجه الذي يحمل رقما زوجيا نسحب طائرا واحدا من القفص C_2، وإذا ظهر غير ذلك نسحب طائرا واحدا من القفص C_3.

1- أنشئ شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية، ثم بيّن أنّ احتمال سحب طائر الحسون $P(A)=\frac{7}{12}$.

2- إذا سحبنا طائر الحسون، ما احتمال أن يكون من القفص C_1؟

3- نضيف إلى القفص C_2، n طيرا من طائر الحسون (A) ثم نكرّر عملية السحب السابقة.

أ) بيّن أنّ احتمال سحب الكناري $P(B)=\frac{n+25}{6(n+10)}$ ، ثم عيّن أكبر قيمة للعدد n بحيث $P(B)>\frac{1}{4}$.

ب) عيّن قيمة n حتى تكون الحادثتان: السحب من C_2 وسحب الكناري (B) مستقلتين.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرّفة بحدها الأول $u_0=\alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=(u_n-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}$.

1- عيّن قيم العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

نفرض في باقي التمرين أنّ $\alpha=\sqrt{2}+\frac{1}{2}$.

2- أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $\sqrt{2}<u_n<2$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما. استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

3- (v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\ln(u_n-\sqrt{2})$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها وحدها الأول.

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n. تأكّد من النهاية المحصل عليها في **2- ب)**.

ج) نضع من أجل كلّ $n\in\mathbb{N}$، $S_n=\frac{v_0}{2^0}+\frac{v_1}{2^1}+\frac{v_2}{2^2}+...+\frac{v_n}{2^n}$. بيّن أنّ: $S_n=(-n-1)\ln 2$.

د) نضع من أجل كلّ $n\in\mathbb{N}^*$، $S'_n=\frac{1}{v_0\times v_2}+\frac{1}{v_1\times v_3}+...+\frac{1}{v_{n-1}\times v_{n+1}}$. احسب S'_n بدلالة n.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-e+e\ln x$

1- احسب $g'(x)$، ثم بيّن أنّ الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0\,;+\infty[$.

2- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}54<\alpha<1{,}55$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(\frac{x-e}{x}\right)\ln x$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستو المزود بالمعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أثبت أنّه من أجل كل $x>0$ فإن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$. استنتج اتجاه تغير الدالة f.

2- احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ (أعط تفسيرا بيانيا) و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3- أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$. ماذا يمكن قوله عن المنحني $(\mathscr{C})$ والمنحني $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة $\ln$؟

ب) ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ $(\mathscr{C}')$، وكذلك وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لحامل محور الفواصل.

4- أ) بيّن أنّ $f(\alpha)=2-\left(\frac{\alpha}{e}+\frac{e}{\alpha}\right)$. باستخدام حصر العدد α، بيّن أنّ $-0{,}34<f(\alpha)<-0{,}32$.

ب) احسب $f(4)$ و $f(6)$ ثم ارسم $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$. $\|\vec{i}\|=1\text{cm}$ و $\|\vec{j}\|=2\text{cm}$.

ج) باستعمال المنحني $(\mathscr{C})$ عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x)=f(m)$ حلين متمايزين، كل منهما أكبر تماما من 1.

5- M_0 نقطة من $(\mathscr{C})$ فاصلتها x_0 و (T_{x_0}) المماس للمنحني $(\mathscr{C})$ في النقطة M_0. بيّن أنّ (T_{x_0}) يشمل النقطة $A\left(0\,;-\frac{1}{2}\right)$ إذا تحقّق: $(x_0-2e)(-1+2\ln x_0)=0$. استنتج عدد المماسات لـ $(\mathscr{C})$ التي تشمل A.

6- λ عدد حقيقي أكبر من 1. احسب بـ cm^2 المساحة $A(\lambda)$ لمجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي حيث: $1\le x\le\lambda$ و $f(x)\le y\le\ln x$، ثم احسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{A(\lambda)}{\lambda}$. (ضع $t=\ln\lambda$ وتذكّر أنّ $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^2}=+\infty$)

انتهى الموضوع الثاني

تصحيح البكالوريا التجريبي 2022م

الموضوع الأول

تمرين 1:

1) الإجابة الصحيحة هي ب) لأن:

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{2022} = \left[e^{i(-\frac{\pi}{6})}\right]^{2022} = e^{i(-\frac{2022\pi}{6})} = e^{i(-\pi)} = -1$$

2) الإجابة الصحيحة هي أ) لأن:

$$\frac{6e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2e^{i(-\frac{\pi}{2})}} = \frac{6}{2}e^{i(\frac{3\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2})} = 3e^{i\frac{23\pi}{12}} = 3e^{i(-\frac{\pi}{12})}$$

3) الإجابة الصحيحة هي ج) لأن:

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^2 = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}}\right)^2 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

4) الإجابة الصحيحة هي أ) لأن:

$$(x+iy)^2 - (x+iy)(x-iy) + 2 = 0$$

$$-2y^2+2+2ixy=0$$

$$\begin{cases} -2y^2+2=0 \\ 2xy=0 \end{cases}$$

نجد: $x=0$ و $y=1$ أو $y=-1$

ومنه: $S=\{-i\,;\,i\}$

5) الإجابة الصحيحة هي ج) لأن:

$$|x+iy+i| = |x+i(y+1)| = \sqrt{x^2+(y+1)^2} = 1$$

$x^2+(y+1)^2=1$ (هي دائرة مركزها $\Omega(0,-1)$ و $r=1$)

تمرين 2:

I-1) $P_1 = \frac{C_7^4}{C_{15}^4} = \frac{1}{39}$

2) $P_2 = 1 - P_1 = \frac{38}{39}$

3) $P_3 = \frac{C_8^4 + C_7^4}{C_{15}^4} = \frac{1}{13}$

4) $P_4 = \frac{C_5^1 \times C_3^3 + C_5^2 \times C_3^2 + C_5^3 \times C_3^1}{C_{15}^4} = \frac{1}{21}$

5) $P_5 = 1 - P_4 = \frac{20}{21}$ (الحادثة العكسية)

6) $P_6 = \frac{C_5^2 \times C_4^2 + C_3^2 \times C_3^2}{C_9^4 + C_6^4} = \frac{23}{47}$

7) $P(X=2) = \frac{C_6^4}{C_{15}^4} = \frac{1}{91}$; $P(X=3) = \frac{C_9^1 \cdot C_6^3}{C_{15}^4} = \frac{12}{91}$

$P(X=4) = \frac{C_9^2 \times C_6^2}{C_{15}^4} = \frac{36}{91}$; $P(X=5) = \frac{C_9^3 \cdot C_6^1}{C_{15}^4} = \frac{24}{65}$

$P(X=6) = \frac{C_9^4}{C_{15}^4} = \frac{6}{65}$

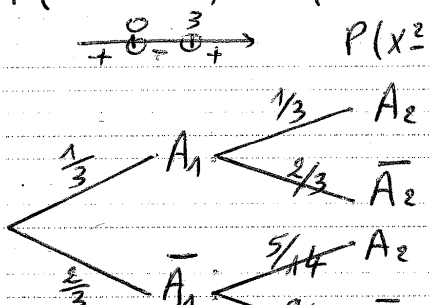
x_i	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{91}$	$\frac{12}{91}$	$\frac{36}{91}$	$\frac{24}{65}$	$\frac{6}{65}$

$$E(X) = \frac{2}{91} + \frac{36}{91} + \frac{144}{91} + \frac{120}{65} + \frac{36}{65} = \frac{22}{5}$$

$$P(X^2-3X\leq 0) = P(0\leq X\leq 3) = P(X=2)+P(X=3)$$

$$P(X^2-3X\leq 0) = \frac{1}{7}$$

II-



$$P(A_2) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\times\frac{5}{14}$$

$$P(A_2) = \frac{22}{63}$$

تمرين 3:

1) أ) $n=0$: $u_0=8$ ، $8>0$ (محققة)

نفرض أن $u_n>0$ ونبرهن أن $u_{n+1}>0$.

لدينا $u_n>0$: $3u_n>0$ و $u_n+4>0$ ومنه $\frac{3u_n}{u_n+4}>0$

$u_{n+1}>0$ ومنه $\forall n\in\mathbb{N}$ ، $u_n>0$.

ب) $u_{n+1}-u_n = \frac{3u_n}{u_n+4} - u_n = \frac{-u_n(u_n+1)}{u_n+4} < 0$

ومنه (u_n) متناقصة تماما.

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

2) $u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n = \frac{3u_n}{u_n+4} - \frac{3}{4}u_n = \frac{-3u_n^2}{4(u_n+4)} < 0$

$n=0$: $u_0 \leq 8\left(\frac{3}{4}\right)^0$; $u_n \leq 8\left(\frac{3}{4}\right)^n$ (محققة)

نفرض أن $u_n \leq 8\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ونبرهن أن $u_{n+1} \leq 8\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

$\left(\frac{3}{4}\right)\times u_n \leq 8\left(\frac{3}{4}\right)^n \times \left(\frac{3}{4}\right)$ ، نجد $\frac{3}{4}u_n \leq 8\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$.

ولدينا: $u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n$ ومنه: $u_{n+1} \leq 8\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

$\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n \leq 8\left(\frac{3}{4}\right)^n$

$0 < u_n \leq 8\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ، $\lim_{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{+\infty} u_n = 0$

(مبرهنة الحصر)

3) $n=0$: $u_0 = \frac{1}{\frac{9}{8}-1} = 8$ (محققة)

نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن صحة $P(n+1)$: $u_{n+1} = \frac{1}{\frac{9}{8}\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}-1}$

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n+4} = \frac{\frac{3}{\frac{9}{8}(4/3)^n-1}}{\frac{1}{\frac{9}{8}(\frac{4}{3})^n-1}+4} = \frac{3}{4\cdot\frac{9}{8}\left(\frac{4}{3}\right)^n-3}$$

$$= \frac{3}{3\left(\frac{9}{8}\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)^n-1\right)} = \frac{1}{\frac{9}{8}\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}-1}$$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n = \frac{1}{\frac{9}{8}(4/3)^n-1}$

$\lim_{+\infty} u_n = 0$ $\left(\frac{4}{3}>1\right)$

4) أ) $v_n = 1 + a\left(\frac{9}{8}\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right) = 1 - a + a\frac{9}{8}\left(\frac{4}{3}\right)^n$

حتى تكون هندسية: $1-a=0$ ومنه $a=1$

ب) $\frac{1}{u_n} = v_n - 1$ ومنه: $S_n = v_0 - 1 + v_1 - 1 + \dots + v_n - 1$

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n - 1 - 1 - \dots - 1 = v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) - (n+1)$$

$$S_n = \frac{9}{8}\left(\frac{1-(4/3)^{n+1}}{1-4/3}\right) - n - 1 = \frac{-27}{8}\left(1-(4/3)^{n+1}\right) - n - 1$$

نضع $w_n = 3^n v_n$ ، $w_n = \frac{9}{8} \cdot 4^n$

w_n متتالية هندسية أساسها 4 و $w_0 = \frac{9}{8}$

$$S'_n = \frac{9}{8}\left(\frac{4^{n+1}-1}{4-1}\right) = \frac{3}{8}\left(4^{n+1}-1\right)$$

تمرين 4 :

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x(x-2+2e^{-x}) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$ (أكبر حد)

2) أ) $f'(x) = 6x - 6(1-e^{-x}+xe^{-x})$

$= 6x - 6 - 6e^{-x}(-1+x) = 6(x-1)(1-e^{-x})$

$1-e^{-x}=0$ لما $x=0$ ؛

x	-1		0		1	
		$+$	0	$-$	0	$+$

ب)

x	-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$9-6e$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-3+6/e$	$\nearrow$	$+\infty$

x	-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	9	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

$g'(x) = 6x-6$

	-1		1	
		$-$	0	$+$

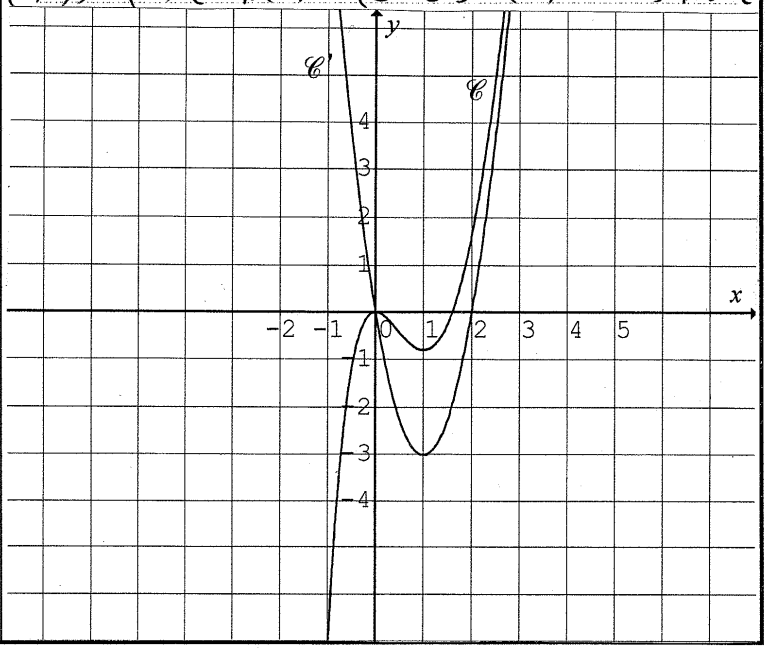
3) f مستمرة ومتزايدة على $[1,+\infty[$ و $0 \in [-3+\frac{6}{e},+\infty[$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ، $f(1) \simeq -0{,}8 < 0$ و $f(2) \simeq 1{,}6 > 0$ ، $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$

لأن $f(1{,}6) > 0$ و $f(1{,}5) < 0$.

4) أ) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to+\infty} 6xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} 6\frac{x}{e^x} = 0$

ومنه (C) و (C') متقاربان بجوار $+\infty$

ب) إشارة $6xe^{-x}$: $x\in[-1,0[$ ، (C) تحت (C') ، $x\in]0,+\infty[$ ، (C) فوق (C') ، (C) يقطع (C') عند $(0,0)$



5) $y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha) = 6(\alpha-1)(1-e^{-\alpha})(x-\alpha)$

لدينا $f(\alpha)=0$ ، بمعنى : $1-e^{-\alpha} = \frac{3\alpha^2}{6\alpha} = \frac{\alpha}{2}$

$y = 6(\alpha-1)(\frac{\alpha}{2})(x-\alpha) = 3\alpha(\alpha-1)(x-\alpha)$

6) أ) $[(ax+b)e^{-x}]' = xe^{-x}$

$(a-b-ax)e^{-x} = xe^{-x}$

$\begin{cases} -a = 1 \\ a-b=0 \end{cases}$ نجد $a=-1$ و $b=-1$

ومنه : أصلية xe^{-x} هي $(-x-1)e^{-x}$

ب) $I_\alpha = \int_0^\alpha (f(x)-g(x))\,dx = \int_0^\alpha 6xe^{-x}\,dx$

$I_\alpha = 6[(-x-1)e^{-x}]_0^\alpha = 6(-\alpha-1)e^{-\alpha}+6$

ولدينا سابقا من $f(\alpha)=0$: $e^{-\alpha} = 1-\frac{\alpha}{2}$

$I_\alpha = 6(-\alpha-1)(1-\frac{\alpha}{2})+6 = 3\alpha(\alpha-1)$

I_α يعبر بالـ u.a المساحة بين (C) ، (C') ، $x=0$ و $x=\alpha$

7) أ) $\lim_{x\overset{<}{\to}0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\overset{<}{\to}0} \frac{f(x)}{x}$

$= \lim_{x\overset{<}{\to}0}(3x-6(1-e^{-x})) = 0 = f'_g(0)$

$\lim_{x\overset{>}{\to}0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\overset{>}{\to}0} \frac{g(x)}{x}$

$= \lim_{x\overset{>}{\to}0}(3x-6) = -6 = g'_d(0)$

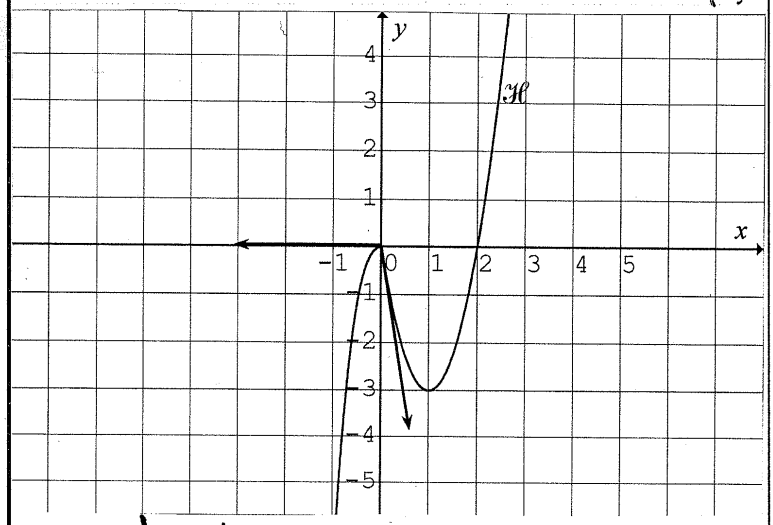
$h'_g(0) \neq h'_d(0)$ ومنه h غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

النقطة $O(0,0)$ تمثل نقطة زاوية.

ب)

x	-1		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$9-6e$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

ج)



عبد المطلب

تصحيح البكالوريا التجريبي 2022م

الموضوع الثاني

"عبد الطالب"

تمرين 1:

1) الإجابة الصحيحة هي ج) لأن:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-xe^x}{e^x+1}=0$$

2) الإجابة الصحيحة هي ج) لأن:

$$g(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x+2}\ ;\quad G(x)=\ln(\ln x+2)+C$$

بما أن $G(\frac{1}{e})=0$ ، $\ln 1+C=0$ ومنه $C=0$

3) لتكن f الدالة المرفقة: $f(x)=x-\ln(1+\frac{1}{x})$

$f'(x)=1+\frac{1}{x(x+1)}>0$ على $]0;+\infty[$

و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ إذن (V_n) متزايدة ومتباعدة

4) الإجابة الصحيحة هي أ) لأن:

$$S_n=\int_0^1 e^{2x}dx+\int_1^2 e^{2x}dx+\dots+\int_n^{n+1}e^{2x}dx$$

باستعمال علاقة شال نجد: $S_n=\int_0^{n+1}e^{2x}dx$

$$S_n=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{n+1}=\frac{1}{2}(e^{2n+2}-1)$$

يمكن البرهان على أنها هندسية ثم حساب المجموع أو الجمع طرف بطرف ثم الاختزال.

5) الإجابة الصحيحة هي ب) لأن:

$$\lim_{x\to+\infty}[\ln(e^{2x}-2x+3)-x]=\lim_{x\to+\infty}[\ln e^{2x}(1-\frac{2x}{e^{2x}}+\frac{3}{e^{2x}})-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(\ln e^{2x}+\ln(1-\frac{2x}{e^{2x}}+\frac{3}{e^{2x}})-x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[x+\ln(1-\underbrace{\frac{2x}{e^{2x}}}_{0}+\underbrace{\frac{3}{e^{2x}}}_{0})]=+\infty$$

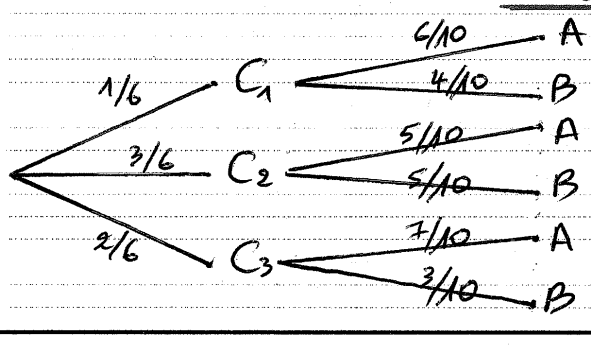
6) الإجابة الصحيحة هي ج) لأن:

$$\begin{cases}f(x)=(x^2+x)e^{-x}\\ f(-1)=0\end{cases}\ ,\quad f'(x)=(-x^2+x+1)e^{-x}$$

$$f'(x)+f(x)=(2x+1)e^{-x}$$

تمرين 2:

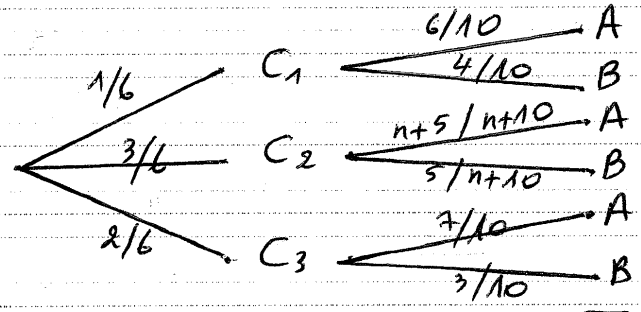
1)



$$P(A)=\frac{1}{6}\times\frac{6}{10}+\frac{3}{6}\times\frac{5}{10}+\frac{2}{6}\times\frac{7}{10}=\frac{35}{60}=\frac{7}{12}$$

2) $P_A(C_1)=\frac{P(C_1\cap A)}{P(A)}=\frac{1/6\times 6/10}{35/60}=\frac{6}{35}$

3)



$$P(B)=\frac{1}{6}\times\frac{4}{10}+\frac{3}{6}\times\frac{5}{n+10}+\frac{2}{6}\times\frac{3}{10}=\frac{n+25}{6(n+10)}$$

أ) $P(B)>\frac{1}{4}$ يعني: $\frac{n+25}{6(n+10)}>\frac{1}{4}$ أي $2n+50>3n+30$

$n<20$ ومنه $n=19$

ب) $P(C_2)=\frac{3}{6}$ و $P(B)=\frac{n+25}{6(n+10)}$

(C_2) و (B) مستقلان إذا تحقق:

$$P(B\cap C_2)=P(B)\times P(C_2)$$

$$\frac{3}{6}\times\frac{5}{n+10}=\frac{5}{2(n+10)}=\frac{n+25}{12(n+10)}$$

$n+25=30$ ومنه $n=5$

تمرين 3:

1) (u_n) ثابتة يعني: $u_{n+1}=u_n=u_0=\alpha$

$\alpha=(\alpha-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}$ ، $(\alpha-\sqrt{2})(\alpha-\sqrt{2}-1)=0$

$(\alpha=\sqrt{2})$ أو $(\alpha=\sqrt{2}+1)$

2) أ) $n=0$: $u_0=\sqrt{2}+\frac{1}{2}$ ؛ $\sqrt{2}<u_0<2$ (محققة)

نفرض أن $\sqrt{2}<u_n<2$ ونبرهن: $\sqrt{2}<u_{n+1}<2$

لدينا: $\sqrt{2}<u_n<2$ ؛ $0<u_n-\sqrt{2}<2-\sqrt{2}$

$0<(u_n-\sqrt{2})^2<6-4\sqrt{2}$ ؛

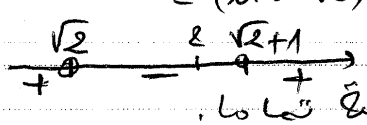
$\sqrt{2}<(u_n-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}<6-3\sqrt{2}<2$ (محققة)

$\sqrt{2}<u_{n+1}<2$ ومنه $\forall n\in\mathbb{N}$: $(\sqrt{2}<u_n<2)$

ب) $u_{n+1}-u_n=(u_n-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}-u_n$

$=(u_n-\sqrt{2})(u_n-\sqrt{2}-1)<0$

لأن $\sqrt{2}<u_n<2$



ومنه (u_n) متناقصة تماما.

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

$$\lim_{+\infty}u_n=\lim_{+\infty}u_{n+1}=\ell$$

$\ell = (\ell-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}$

$(\ell-\sqrt{2})(\ell-\sqrt{2}-1)=0$ ، $\ell=\sqrt{2}$ مقبول ، $\ell=\sqrt{2}+1$ مرفوض

3) أ) $V_{n+1}=\ln(U_{n+1}-\sqrt{2})=\ln(U_n-\sqrt{2})^2$

$=2\ln(U_n-\sqrt{2})=2V_n$

(V_n) متتالية هندسية أساسها 2 و $V_0=-\ln 2$

ب) $V_n=V_0\cdot q^n=(-\ln 2)\,2^n$

$V_n=\ln(U_n-\sqrt{2})$ ومنه : $U_n=e^{V_n}+\sqrt{2}$

$U_n=e^{(-\ln 2)2^n}+\sqrt{2}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\sqrt{2}$

ج) $S_n=\frac{V_0}{2^0}+\frac{V_1}{2^1}+\dots+\frac{V_n}{2^n}=\frac{V_0}{2^0}+\frac{V_0\cdot 2^1}{2^1}+\dots+\frac{V_0 2^n}{2^n}$

$S_n=V_0+V_0+\dots+V_0=(n+1)V_0=(n+1)(-\ln 2)$

د) $S'_n=\frac{1}{V_1^2}+\frac{1}{V_2^2}+\dots+\frac{1}{V_n^2}=\frac{1}{V_0^2q^2}+\frac{1}{V_0^2q^4}+\dots+\frac{1}{V_0^2q^{2n}}$

$S'_n=\frac{1}{V_0^2}\left(q^{-2}+q^{-4}+\dots+q^{-2n}\right)=\frac{1}{V_0^2}q^{-2}\left(\frac{1-q^{-2n}}{1-q^{-2}}\right)$

$S'_n=\frac{1}{(\ln 2)^2}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\right)=\frac{1}{3(\ln 2)^2}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

تمرين 4 :

I-1) $g'(x)=1+\frac{e}{x}=\frac{x+e}{x}>0$ ومنه g متزايدة

2) g مستمرة ومتزايدة على $]1{,}54;1{,}55[$.

$g(1{,}55)\simeq 0{,}02>0$ و $g(1{,}54)\simeq -0{,}004<0$. حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α .

إشارة $g(x)$: $-$ α $+$

II-1) $f'(x)=\frac{e}{x^2}\ln x+\frac{x-e}{x^2}=\frac{e\ln x+x-e}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$

f متزايدة لما $x\geq\alpha$ و متناقصة لما $x\leq\alpha$.

2) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x-e}{x}\right)=-\infty$

$x=0$ مستقيم مقارب لـ $(\mathcal{C})$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-e}{x}\right)=1$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-e\left(\frac{\ln x}{x}\right)=0$

ومنه $(\mathcal{C}')$ يقارب $(\mathcal{C})$ بجوار $(+\infty)$

ب) وضعية $(\mathcal{C})$ بالنسبة لـ $(\mathcal{C}')$. ندرس إشارة

$f(x)-y=-e\frac{\ln x}{x}$ $+$ 1 $-$

$x>1$: $(\mathcal{C})$ أسفل $(\mathcal{C}')$. $0<x<1$: $(\mathcal{C})$ أعلى $(\mathcal{C}')$

$(\mathcal{C}')$ يقطع $(\mathcal{C})$ عند النقطة $(1,0)$.

وضعية $(\mathcal{C})$ بالنسبة لـ (Ox) : ندرس إشارة $f(x)$.

$f(x)=\left(\frac{x-e}{x}\right)\ln x$. 0 $+$ 1 $-$ e $+$

$1<x<e$: $(\mathcal{C})$ أسفل (Ox) . $(\mathcal{C})$ يقطع (Ox) عند $(1,0)$ و $(e,0)$.

$x\in]0,1[\cup]e;+\infty[$: $(\mathcal{C})$ أعلى (Ox) .

4) أ) $f(\alpha)=\left(\frac{\alpha-e}{\alpha}\right)\ln\alpha$ و لدينا : $g(\alpha)=0$ ،

$\alpha-e+e\ln\alpha=0$ ، $\ln\alpha=\frac{e-\alpha}{e}$ ، نعوضها في $f(\alpha)$

$f(\alpha)=\left(\frac{\alpha-e}{\alpha}\right)\left(\frac{e-\alpha}{e}\right)$ ومنه : $f(\alpha)=2-\frac{\alpha}{e}-\frac{e}{\alpha}$

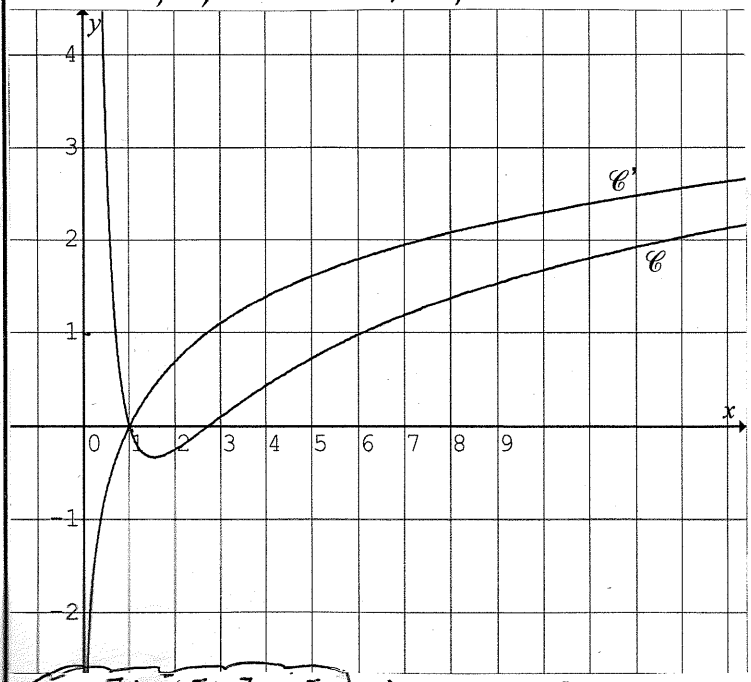
$1{,}54<\alpha<1{,}55$ ، $0{,}566<\frac{\alpha}{e}<0{,}57$.

$0{,}645<\frac{1}{\alpha}<0{,}649$ ؛ $1{,}754<\frac{e}{\alpha}<1{,}765$

$2{,}319<\frac{\alpha}{e}+\frac{e}{\alpha}<2{,}334$ ؛ $-2{,}334<-\left(\frac{\alpha}{e}+\frac{e}{\alpha}\right)<-2{,}319$

$-0{,}34<2-\left(\frac{\alpha}{e}+\frac{e}{\alpha}\right)<-0{,}32$ ومنه : $-0{,}34<f(\alpha)<-0{,}32$

ب) $f(4)\simeq 0{,}44$ و $f(6)\simeq 0{,}98$



ج) $f(\alpha)<f(m)<0$ ومنه $m\in]1;\alpha[\cup]\alpha;e[$

5) $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ يشمل $A(0;-\frac{1}{2})$

$-\frac{1}{2}=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$

$-\frac{1}{2}=\left(\frac{x_0-e+e\ln x_0}{x_0^2}\right)(-x_0)+\left(\frac{x_0-e}{x_0}\right)\ln x_0$

$-\frac{1}{2}=\frac{-x_0+e-2e\ln x_0+x_0\ln x_0}{x_0}$

$-2x_0+2e-4e\ln x_0+2x_0\ln x_0=-x_0$

$-x_0+2e+2\ln x_0\cdot(-2e+x_0)=0$

$(x_0-2e)(-1+2\ln x_0)=0$ (و هو المطلوب)

$1-2\ln x_0=0$ لما $x_0=\sqrt{e}$ و $2e-x_0=0$ لما $x_0=2e$

هناك مماسين عند $2e$ و $\sqrt{e}$ يشملان النقطة A

6) $A(\lambda)=\int_1^\lambda(\ln x-f(x))\,dx=\int_1^\lambda e\frac{\ln x}{x}\,dx=\left[e\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^\lambda$

$A(\lambda)=e\frac{(\ln\lambda)^2}{2}\,ua$ ومنه $A(\lambda)=e(\ln\lambda)^2\,cm^2$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{A(\lambda)}{\lambda}=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}e\frac{(\ln\lambda)^2}{\lambda}=\lim\limits_{t\to+\infty}e\left(\frac{t^2}{e^t}\right)$

$=\lim\limits_{t\to+\infty}e\frac{1}{\left(\frac{e^t}{t^2}\right)}=0$

"عبد المطلب"