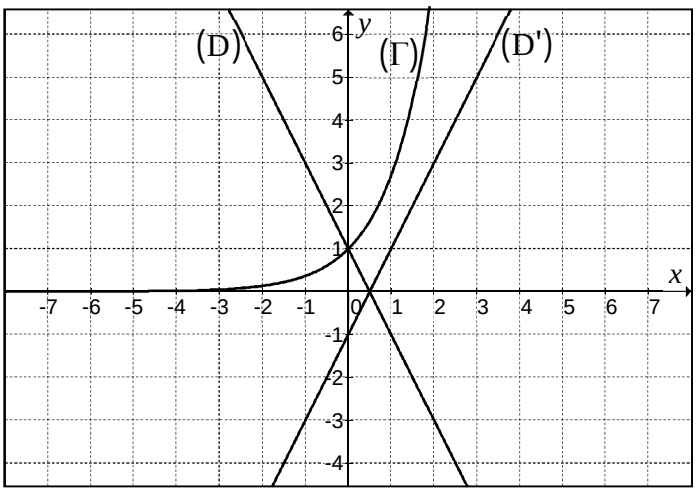
الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) **المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية"** **المادة: رياضيات**	**اختبار** **الفصل الأول**	**الموسم الدراسي: 2023/2022م** **المدة: (2سا 30د)** **إعداد: عبد المطلب** مدرسة "الرجاء والتفوق" الخاصة Ecole Erradja wa Tafaouk ÉCOLE PRIVÉE

تمرين1 (9نقاط)



I- في الشكل المقابل (Γ)، (D) و (D') على الترتيب التمثيلات البيانية للدوال العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $x \mapsto e^x$ ، $x \mapsto -2x+1$ و $x \mapsto 2x-1$.

u و v الدالتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x)=e^x+2x-1$ و $v(x)=e^x-2x+1$.

1) بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم العدد الحقيقي x وضعية (Γ) بالنسبة لكل من المستقيمين (D) و (D').

2) استنتج إشارة كل من $u(x)$ و $v(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- f الدالة العددية المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{e^x+2x-1}{e^x-2x+1}$.

$(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ، ثم فسّر هاتين النهايتين هندسيا.

ب) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم (d) ذي المعادلة $y=1$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\dfrac{2(-2x+3)e^x}{(e^x-2x+1)^2}$.

ب) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها. (اعتبر $f\left(\frac{3}{2}\right)\simeq 2,6$)

3) أ) احسب $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ ، ثم فسّر هذه النهاية هندسيا.

ب) اكتب معادلة لـ (Δ) مماس المنحني $(\mathscr{C})$ عند المبدأ O .

4) أ) ارسم المماس (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$. (وحدة الرسم $2cm$)

ب) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m $(m\neq0)$ التي من أجلها تقبل المعادلة: $f(x)=\dfrac{x}{m}$ ثلاثة حلول متمايزة، أحدهم فقط سالب تماما.

5) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\left(f(x)\right)^2-2f(x)$.

احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة g .

III- f_k الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x)=\dfrac{e^x-2kx+k}{e^x-2x+1}$. حيث k وسيط حقيقي.

ليكن $(\mathscr{C}_k)$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أنّ كل المنحنيات $(\mathscr{C}_k)$ تمر من نقطة ثابتة I (مستقلة عن k) يطلب تعيين إحداثيتيها.

2) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f_k'(x)=\dfrac{(k-1)(2x-3)e^x}{(e^x-2x+1)^2}$ ، ثم ادرس اتّجاه تغيّر f_k من أجل $k<1$ و $k>1$.

3) عيّن قيمة k_0 التي من أجلها المنحنيين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}_{k_0})$ متناظران بالنسبة للمستقيم (d)، وارسم $(\mathscr{C}_{k_0})$ في المعلم السابق.

تمرين2 (8نقاط)

I- g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-3+\ln x$.

1) احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) بيّن أنّ الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

3) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2,20<\alpha<2,21$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II- f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

$(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ ، أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة، ثم بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (ضع $t=\sqrt{x}$).

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.

ب) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) أ) ادرس الوضعية النسبية للمنحنيين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$، حيث $(\mathscr{C}')$ هو محني الدالة: $x\mapsto\sqrt{x}$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\sqrt{x}\right)$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا.

4) أ) بيّن أنّ $f(\alpha)=\dfrac{2(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$ ، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$ سعته 0,02.

ب) بيّن أنّه توجد فاصلة وحيدة x_0 حيث المماس لـ$(\mathscr{C})$ والمماس لـ$(\mathscr{C}')$ عند x_0 متوازيان.

5) أ) أنشئ المماس (Δ) لـ$(\mathscr{C})$ عند 1، والمنحنيين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ في المعلم نفسه. (نأخذ $f(\alpha)\simeq1,6$)

ب) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، وجود وعدد حلول المعادلة: $f(x)=-x+m^2$.

6) h الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\alpha}{2}\right\}$ بـ: $h(x)=f\left(|2x-\alpha|\right)$.

أ) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة h على المجال $\left]\dfrac{\alpha}{2};+\infty\right[$. (النهايات غير مطلوبة)

ب) بيّن أنّ $x=\dfrac{\alpha}{2}$ ، هي معادلة لمحور تناظر المنحني الممثل للدالة h ، ثم شكّل جدول تغيرات h .

تمرين3 (3نقاط)

g الدالة المعرّفة والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{g(x)}{x+1}$ ، حيث $f(0)=1$.

نعتبر المعادلتين التفاضليتين التاليتين: $y'-y=0$ ... (E) و $y'-y=-\dfrac{e^x}{(x+1)^2}$ ... (F) .

1) احسب $g(0)$ ، ثم عيّن عبارة $g(x)$ إذا علمت أنّ g حل للمعادلة التفاضلية (E).

2) عيّن عبارة $f(x)$ ، ثم بيّن أنّ الدالة f هي حل للمعادلة التفاضلية (F).

3) عيّن الحل h للمعادلة التفاضلية $y'-y=\dfrac{e^x}{(x+1)^2}$ ، إذا علمت أنّ $h(0)=0$.

بالتوفيق

تصحيح إختبار الفصل الأول 2022م

"عبد المطلب"

تمرين 1:

I-1) • $x>0$: (Γ) أعلى (D) ، $x<0$: (Γ) أسفل (D) ، (Γ) يقطع (D) عند $A(0;1)$

• (Γ) أعلى (D') من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

2) • $u(x)=e^x-(-2x+1)$

x		0	
إشارة $u(x)$	$-$	0	$+$

• $v(x)=e^x-(2x-1)>0$

II-1) أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\frac{e^x}{x}+2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-2+\frac{1}{x}\right)}=-1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1+\frac{2x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{2x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)}=1$

$y=-1$ معادلة للمستقيم المقارب الأفقي بجوار $-\infty$.

$y=1$ معادلة للمستقيم المقارب الأفقي بجوار $+\infty$

ب) إشارة: $f(x)-y=f(x)-1=\frac{2(2x-1)}{e^x-2x+1}$

من إشارة $(2x-1)$ لأن $e^x-2x+1>0$.

$x>\frac{1}{2}$: $(\mathscr{C})$ أعلى (d) ، $x<\frac{1}{2}$: $(\mathscr{C})$ أسفل (d) ، $(\mathscr{C})$ يقطع (d) عند $I\left(\frac{1}{2};1\right)$.

2) أ) f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$f'(x)=\frac{(e^x+2)(e^x-2x+1)-(e^x-2)(e^x+2x-1)}{(e^x-2x+1)^2}=\frac{(-4x+6)e^x}{(e^x-2x+1)^2}$

ب) إشارة $f'(x)$:

		$3/2$	
	$+$	0	$-$

f متزايدة تماما لما $x\leq\frac{3}{2}$ ، ومتناقصة تماما لما $x\geq\frac{3}{2}$.

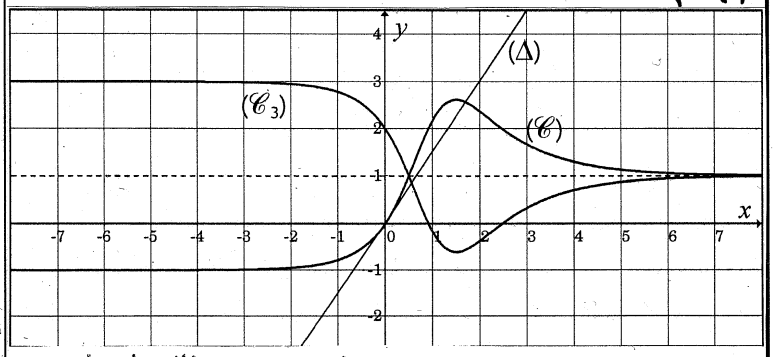
x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$2,6$	$\searrow$	1

3) أ) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\frac{3}{2}$

العدد $f'(0)$ هو معامل توجيه المماس لـ $(\mathscr{C})$ عند 0.

ب) المماس (Δ): $y=f'(0)(x-0)+f(0)=\frac{3}{2}x$

4) أ)



$y=\frac{x}{m}$: مستقيمات تشمل النقطة الثابتة O.

$0<\frac{1}{m}<\frac{3}{2}$ ومنه: $m\in\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$

5) $\lim_{x\to-\infty} g(x)=(-1)^2-2(-1)=3$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=(1)^2-2(1)=-1$

$g'(x)=2f'(x)\cdot f(x)-2f'(x)=2f'(x)(f(x)-1)$

إشارة $(f(x)-1)$ مذكورة في II-1) ب).

x	$-\infty$		$1/2$		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$1/2$		$3/2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$1,6$	$\searrow$	-1

III-1) لتكن $I(x_0;y_0)$ نقطة مشتركة لجميع $(\mathscr{C}_k)$

$y_0=\frac{e^{x_0}+k(-2x_0+1)}{e^{x_0}-2x_0+1}$

$k(-2x_0+1)-y_0(e^{x_0}-2x_0+1)+e^{x_0}=0$

ومنه: $\begin{cases}-2x_0+1=0\\-y_0(e^{x_0}-2x_0+1)+e^{x_0}=0\end{cases}$ ، $I\left(\frac{1}{2};1\right)$

2) $f_k'(x)=\frac{(e^x-2k)(e^x-2x+1)-(e^x-2)(e^x-2kx+k)}{(e^x-2x+1)^2}$

$f_k'(x)=\frac{e^x(-2x+3+2kx-3k)}{(e^x-2x+1)^2}=\frac{e^x(-2x+3-k(-2x+3))}{(e^x-2x+1)^2}$

$f_k'(x)=\frac{(k-1)(2x-3)e^x}{(e^x-2x+1)^2}$

• $k<1$: إشارة $f_k'(x)$:

		$3/2$	
	$+$	0	$-$

f_k متزايدة تماما على: $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$.

f_k متناقصة تماما على: $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.

• $k>1$: إشارة $f_k'(x)$:

		$3/2$	
	$-$	0	$+$

f_k متزايدة تماما على: $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.

f_k متناقصة تماما على: $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$.

لاحظ: لما $k=1$ ، f_k ثابتة.

3) $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}_{k_0})$ متناظران بالنسبة لـ (d)

يعني: $\forall x\in\mathbb{R}\ \frac{f(x)+f_{k_0}(x)}{2}=1$

$\frac{e^x+2x-1}{e^x-2x+1}+\frac{e^x-2k_0x+k_0}{e^x-2x+1}=2$

$2e^x+(2-2k_0)x-1+k_0=2e^x-4x+2$

$(2-2k_0)x-1+k_0=-4x+2$

ومنه: $\begin{cases}2-2k_0=-4\\-1+k_0=2\end{cases}$ ، $k_0=3$

"عبد المطلب"

تمرين 2:

I-1) $\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

2) $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0$ ،

ومنه g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

3) g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ،

$g(2,2) \simeq -0,01 < 0$ و $g(2,21) \simeq 0,003 > 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2,2 < \alpha < 2,21$.

إشارة $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II-1) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 + \infty + \infty = +\infty$ $x=0$ م م

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{t\to +\infty}\left(t + \frac{1}{t} - \frac{\ln t^2}{t}\right)$

$= \lim_{t\to +\infty}\left(t + \frac{1}{t} - 2\frac{\ln t}{t}\right) = +\infty$

2) f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.

لاحظ: $\left(\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}$

$f'(x) = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}} - \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}} = \frac{x-3+\ln x}{2x\sqrt{x}} = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$:

f متزايدة تماما على $x \geq \alpha$ ومتناقصة تماما على $0 < x \leq \alpha$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ) $f(x) - \sqrt{x} = \frac{1-\ln x}{\sqrt{x}}$:

$x > e$: (C) أسفل (Γ)

$0 < x < e$: (C) أعلى (Γ)

(C) يقطع (Γ) عند $A(e;\sqrt{e})$

ب) $\lim_{x\to +\infty}\left(f(x) - \sqrt{x}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{t\to +\infty}\left(\frac{1}{t} - \frac{2\ln t}{t}\right) = 0$

ومنه (Γ) يقارب (C) بجوار $(+\infty)$.

4) أ) $f(\alpha) = \sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\ln\alpha}{\sqrt{\alpha}}$ ولدينا $g(\alpha) = 0$ ،

أي $\alpha - 3 + \ln\alpha = 0$ ، $\ln\alpha = 3 - \alpha$

$f(\alpha) = \sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{3-\alpha}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{3}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha}$

$f(\alpha) = 2\sqrt{\alpha} - \frac{2}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$

$2,2 < \alpha < 2,21$ ؛ $1,2 < \alpha - 1 < 1,21$ ؛ $2,4 < 2(\alpha-1) < 2,42$

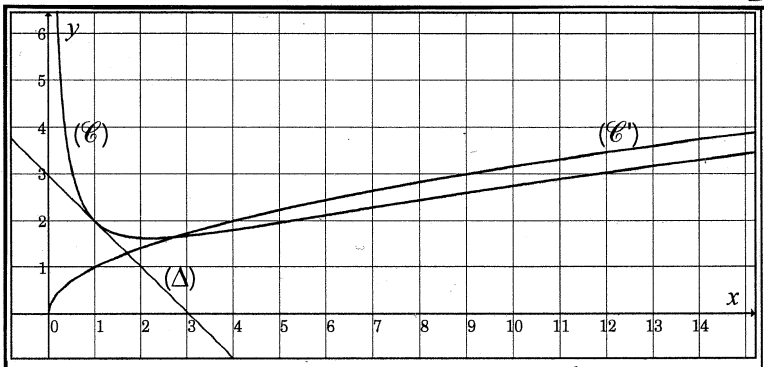
$\sqrt{2,2} < \sqrt{\alpha} < \sqrt{2,21}$ ؛ $\frac{1}{\sqrt{2,21}} < \frac{1}{\sqrt{\alpha}} < \frac{1}{\sqrt{2,2}}$ ؛

$\frac{2,4}{\sqrt{2,21}} < \frac{2(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}} < \frac{2,42}{\sqrt{2,2}}$ ومنه : $1,61 < f(\alpha) < 1,63$

ب) $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ ؛ $\frac{x_0 - 3 + \ln x_0}{2x_0\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

$-3 + \ln x_0 = 0$ ؛ ومنه : $x_0 = e^3$

5) أ) (Δ) : $y = f'(1)(x-1) + f(1) = -x + 3$



ب) حلول هذه المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C) مع مستقيمات موازية لـ (Δ) .

$m^2 < 3$ أي $-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$ لا يوجد حلول.

$m^2 = 3$ أي $m = \sqrt{3}$ أو $m = -\sqrt{3}$ يوجد حلا مضاعفا.

$m^2 > 3$ أي $]-\infty;-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};+\infty[$ يوجد حلان.

6) أ) $h(x) = f(2x-\alpha)$ ؛ $x > \frac{\alpha}{2}$ ، $h'(x) = 2f'(2x-\alpha)$

$h'(x) = 0$ لما $2x - \alpha = \alpha$ ومنه : $x = \alpha$.

$h'(x) > 0$ ، $f'(2x-\alpha) > 0$ ، $2x - \alpha > \alpha$ ومنه : $x > \alpha$

$h'(x) < 0$ ، $f'(2x-\alpha) < 0$ ، $0 < 2x - \alpha < \alpha$ ومنه : $\frac{\alpha}{2} < x < \alpha$

h متزايدة تماما على $x \geq \alpha$ ومتناقصة تماما على $\frac{\alpha}{2} < x \leq \alpha$

ب) من أجل $x \neq \frac{\alpha}{2}$ ؛ $\alpha - x \neq \frac{\alpha}{2}$ و $h(\alpha - x) = h(x)$

$x \neq \frac{\alpha}{2}$ ، $-x \neq -\frac{\alpha}{2}$ ومنه : $\alpha - x \neq \frac{\alpha}{2}$.

$h(\alpha - x) = f(|2(\alpha - x) - \alpha|) = f(|-2x + \alpha|) = f(|2x - \alpha|) = h(x)$

x	$-\infty$		0		$\alpha/2$		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$x = \frac{\alpha}{2}$ محور تناظر يعني $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\alpha}{2}$ ؛ $x_1, x_2 \in D_h$

إذا كان $x_1 = \alpha$ ، $\frac{\alpha + x_2}{2} = \frac{\alpha}{2}$ ومنه : $x_2 = 0$.

تمرين 3:

1) $g(x) = (x+1)f(x)$ ومنه : $g(0) = f(0) = 1$

حل (E) هو : $x \mapsto Ce^x$ (الحل العام) $C \in \mathbb{R}$

بما أن $g(0) = 1$ إذن، $Ce^0 = 1$ ؛ أي $C = 1$

ومنه : $g(x) = e^x$

2) لدينا : $f(x) = \frac{g(x)}{x+1} = \frac{e^x}{x+1}$.

$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$

f حل لـ (F) يعني : $f' - f = \frac{-e^x}{(x+1)^2}$.

(مدققة) $f'(x) - f(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2} - \frac{e^x}{(x+1)} = \frac{-e^x}{(x+1)^2}$

3) $\begin{cases} h' - h = \frac{e^x}{(x+1)^2} \\ f' - f = -\frac{e^x}{(x+1)^2} \end{cases}$ بالجمع نجد : $(h+f)' - (h+f) = 0$

ومنه : $h + f$ حل لـ (E) .

$h(x) + f(x) = Ce^x$ إذن : $h(x) = Ce^x - f(x)$

$h(0) = 0$ ، $C = 1$ ومنه : $h(x) = \frac{xe^x}{x+1}$

"عبد المطلب"